

УДК 621.391 : 519.725.3

© 2023 г. И. Станоевич, В. Шенк

СВЕРТОЧНЫЕ КОДЫ С ОПТИМАЛЬНЫМ
ДВУСТОРОННИМ ПРОФИЛЕМ РАССТОЯНИЙ¹

Двусторонний профиль расстояний (ДПР) сверточного кода определяется как минимум из профилей расстояний этого кода и соответствующего ему “инверсного” кода. Представлены таблицы кодов с оптимальным ДПР (ОДПР-кодов), минимизирующих среднюю сложность алгоритмов двустороннего последовательного декодирования. Компьютерный поиск можно ускорить благодаря тому, что коды с оптимальным профилем расстояния (ОПР) большей памяти имеют в качестве своих префиксов ОПР-коды меньшей памяти, а также тому, что ОДПР-коды можно получать путем конкатенации ОПР- и инверсных ОПР-кодов с меньшей памятью. С помощью моделирования проводится сравнение производительности ОДПР-кодов и других кодов.

Ключевые слова: сверточные коды, профиль расстояний, двустороннее декодирование.

DOI: 10.31857/S0555292323030014, EDN: FQBJWI

§ 1. Введение

Пусть

$$G(D) = \begin{bmatrix} g_{11}(D) & \dots & g_{1n}(D) \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{k1}(D) & \dots & g_{kn}(D) \end{bmatrix} \quad (1)$$

– порождающая матрица сверточного кодера со скоростью $R = k/n$, где $g_{ij}(D) \in \mathbb{F}_2[D]$ – двоичные порождающие многочлены, и пусть $m = \max_{i,j} \deg(g_{ij}(D))$ – его память.

Тогда ℓ -м значением функции столбцового расстояния (ФСР) кода [1] называется

$$d_\ell = \min_{\mathbf{u}: \mathbf{u}_0 \neq \mathbf{0}} w_H(\mathbf{v}_{[0,\ell]}), \quad (2)$$

где $w_H(\cdot)$ – вес Хэмминга последовательности, двоичные векторы $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots)$ и $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots)$ представляют собой k -мерную информационную последовательность и n -мерное кодовое слово соответственно, и для последовательности $\mathbf{x}$ мы обозначаем $x_{[a,b]} = (x_a, x_{a+1}, \dots, x_b)$. Если для двух ФСР $\mathbf{d} = (d_0, d_1, \dots)$ и $\mathbf{d}' = (d'_0, d'_1, \dots)$ выполнены условия $d_0 = d'_0, \dots, d_{\ell-1} = d'_{\ell-1}, d_\ell > d'_\ell$ для некоторого ℓ , то будем говорить, что $\mathbf{d}$ лучше, чем $\mathbf{d}'$, или $\mathbf{d} > \mathbf{d}'$. Кодом с оптимальной ФСР $\mathbf{d}^*$ для заданных параметров k, n и m будем называть такой код, для которого не существует другого кода с теми же параметрами, чья ФСР $\mathbf{d}$ лучше, чем $\mathbf{d}^*$. Профилем расстояний (ПР)

¹ Работа выполнена при поддержке Министерства образования, науки и технологического развития Республики Сербия в рамках проекта № 451-03-68/2020-14/200156: “Инновационные научные и творческие исследования в области деятельности факультета технических наук”.

кода [1] называется его усеченная ФСР $d_{[0,m]}$, где сравнение и оптимальность определяются таким же образом. Чтобы иметь большую гибкость при выборе оптимизируемых свойств кода, определим также укороченный профиль расстояний $\text{ПР}^{(s)}$ для $s < m$ как $d_{[0,m-s]}$, и для удобства обозначений будем обозначать ФСР через $\text{ПР}^{(-\infty)}$.

В наиболее часто используемых алгоритмах последовательного декодирования, таких как стек-алгоритм [2, 3] и алгоритм Фано [4], применение ОПР-кодов минимизирует среднее число расширений узлов кодового дерева. Влияние ФСР и ПР на сложность декодирования было изучено для двоичного симметричного канала [5] и канала с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ-канала) [6]. В обоих случаях желательно, чтобы значения d_ℓ росли как можно быстрее в начале ФСР, откуда и вытекает определение ее оптимальности, причем начальные значения оказывают более существенное влияние. ОПР-коды и коды, оптимизированные по другим критериям, широко исследовались, например, в [7–15].

Хотя сложность стандартных алгоритмов однонаправленного декодирования минимизируется при использовании ОПР-кодов, это не относится к алгоритмам двустороннего декодирования, например, [16–19]. Количество посещенных узлов в прямом кодовом дереве зависит от ПР исходного кода (прямой ПР), а в обратном кодовом дереве – от ПР “инверсного” кода (обратный ПР).

В большинстве случаев, когда алгоритм последовательного декодирования не способен выдать правильную последовательность, это связано со слишком большим количеством посещенных узлов в его кодовом дереве (деревьях), что приводит к переполнению памяти или чрезмерно большому времени декодирования. В § 2 описывается процедура эффективного поиска кодов, удобных для декодирования алгоритмами двустороннего последовательного декодирования. Коды с оптимизированным прямым и обратным ПР стремятся минимизировать количество узлов в обоих кодовых деревьях декодера. В § 3 представлены коды, найденные с помощью этой процедуры для некоторых из выбранных наборов параметров. В § 4 производительность этих кодов сравнивается с другими оптимизированными кодами, используемыми при декодировании по методу максимального правдоподобия (Витерби), а также при одностороннем и двустороннем стековом декодировании. Улучшения в терминах вероятности ошибки на блок (FER) и общей сложности декодирования вычисляются с помощью имитационного моделирования.

§ 2. Двусторонний профиль расстояний

Пусть $\bar{G}(D) = D^m G(D^{-1})$ – порождающая матрица инверсного кода для кода, порожденного матрицей $G(D)$, с элементами $\bar{g}_{ij}(D)$. Пусть $\bar{\mathbf{d}} = (\bar{d}_0, \bar{d}_1, \dots)$ – ФСР инверсного кода. Чтобы учитывать оба направления декодирования, определим двустороннюю ФСР (ДФСР) $\hat{\mathbf{d}}$ как последовательность значений $\hat{d}_\ell = \min(d_\ell, \bar{d}_\ell)$ и двусторонний ПР $^{(s)}$ (ДПР $^{(s)}$) как $\hat{d}_{[0,m-s]}$, а также соответствующие оптимальные ДФСР- и ДПР $^{(s)}$ -коды (ОДФСР- и ОДПР $^{(s)}$ -коды).

Через $g_{ij}^{(\ell)}$ обозначим ℓ -й коэффициент порождающего многочлена $g_{ij}(D)$, и положим

$$G^{(\ell)} = \begin{bmatrix} g_{11}^{(\ell)} & \cdots & g_{1n}^{(\ell)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k1}^{(\ell)} & \cdots & g_{kn}^{(\ell)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

и

$$G^{[a,b]}(D) = \sum_{\ell=a}^b G^{(\ell)} D^\ell, \quad (4)$$

$$\bar{G}^{[a,b]}(D) = \sum_{\ell=a}^b G^{(m-\ell)} D^\ell, \quad (5)$$

так что $G(D) = G^{[0,m]}(D)$ и $\bar{G}(D) = \bar{G}^{[0,m]}(D)$. Кроме того, для

$$G(D) = G^{[0,p]}(D) + G^{[p+1,m]}(D)$$

будем говорить, что $G^{[0,p]}(D)$ является префиксом $G(D)$ и что $G(D)$ получена конкатенацией $G^{[0,p]}(D)$ и $G^{[p+1,m]}(D)$. Нетрудно видеть, что если код, задаваемый матрицей $G(D)$, является ОНР-кодом, то код, задаваемый матрицей $G^{[0,p]}(D)$, также должен быть ОНР-кодом.

Если память кода m нечетна, то можно рассмотреть аналогичное разложение порождающей матрицы в виде

$$G(D) = G^F(D) + D^m G^B(D^{-1}), \quad (6)$$

где

$$G^F(D) = G^{[0,(m-1)/2]}(D), \quad (7)$$

$$G^B(D) = \bar{G}^{[0,(m-1)/2]}(D). \quad (8)$$

В этом случае мы называем $G^F(D)$ прямой половиной матрицы $G(D)$, а $G^B(D)$ – обратной половиной, и порождающую матрицу инверсного кода можно выразить как

$$\bar{G}(D) = G^B(D) + D^m G^F(D^{-1}).$$

Из определений соответствующих ФРС видно, что $d_{[0,(m-1)/2]}$ зависит только от $G^F(D)$, а $\hat{d}_{[0,(m-1)/2]}$ – только от $G^B(D)$. Так как мы можем выбирать $G^F(D)$ и $G^B(D)$ независимо, то первую половину ДПР $\hat{d}_{[0,(m-1)/2]}$ можно сделать равной первой половине ОНР $d_{[0,(m-1)/2]}^*$ тогда и только тогда, когда обе матрицы $G^F(D)$ и $G^B(D)$ задают ОНР-коды с памятью $(m-1)/2$.

Если память кода m четна, то можно разложить порождающую матрицу как

$$G(D) = G^F(D) + G^{(m/2)} D^{m/2} + D^m G^B(D^{-1}), \quad (9)$$

где на этот раз

$$G^F(D) = G^{[0,m/2-1]}(D), \quad (10)$$

$$G^B(D) = \bar{G}^{[0,m/2-1]}(D). \quad (11)$$

В этом случае можно оптимизировать $\hat{d}_{[0,m/2-1]}$ аналогичным образом.

Для описания процедуры нахождения ОДФСР- и ОДПР^(s)-кодов нам понадобятся несколько определений. В поле $\mathbb{F}_2$ положим $0 < 1$. Двоичные многочлены сравниваются лексикографически, т.е. для $g(D), h(D) \in \mathbb{F}_2[D]$ полагаем $g(D) < h(D)$, если $g^{(0)} = h^{(0)}, \dots, g^{(\ell-1)} = h^{(\ell-1)}, g^{(\ell)} < h^{(\ell)}$ для некоторого ℓ . Векторы из двоичных многочленов сравниваются лексикографически, т.е. для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (\mathbb{F}_2[D])^r$ полагаем $\mathbf{x} < \mathbf{y}$, если $x_1 = y_1, \dots, x_{\ell-1} = y_{\ell-1}, x_\ell < y_\ell$ для некоторого ℓ . Если $\mathbf{g}_{i*}$ ($\mathbf{g}_{*j}$) – i -я строка (j -й столбец) $(k \times n)$ -матрицы $G(D)$, то будем говорить, что матрица имеет упорядоченные строки (столбцы), если $\mathbf{g}_{1*} \leq \dots \leq \mathbf{g}_{k*}$ ($\mathbf{g}_{*1} \leq \dots \leq \mathbf{g}_{*n}$). Через Π_ℓ обозначим множество всех перестановок элементов $\{1, \dots, \ell\}$.

Для заданных k и n обозначим через $\mathcal{U}_m$ множество ОНР-кодов с памятью m , а через $\mathcal{B}_m$ – множество ОДФСР-кодов (ОДПР^(s)-кодов) с памятью m . ОДФСР-коды (ОДПР^(s)-коды) можно находить с помощью следующей двухэтапной процедуры:

I. Найти все ОНР-коды для требуемых значений m .

1. Положить $\mathcal{U}_{-1} = \{\mathbf{0}_{k \times n}\}$.
Положить $m = 0$.
2. Для всех префиксов $G'(D) \in \mathcal{U}_{m-1}$:
Для всех двоичных $(k \times n)$ -матриц $G^{(m)}$:
Рассмотреть $G(D) = G'(D) + G^{(m)}D^m$.
Если $G(D)$ имеет упорядоченные строки и столбцы, вычислить ее ПР.
Оставить в $\mathcal{U}_m$ только те матрицы, которые имеют наилучшие ПР среди всех вычисленных.
3. Если требуется больше множеств, положить $m = m + 1$ и перейти к шагу 2.

II. Найти все ОДФСР-коды (ОДПР^(s)-коды) для всех требуемых значений m .

1. Положить $m = \max(1, 2s - 1)$.
2. Положить $\mathcal{B}_m = \{\}$.
Положить $p = \lfloor (m - 1)/2 \rfloor$.
3. Для всех $G^F(D) \in \mathcal{U}_p$ и для всех $G^B(D) \in \mathcal{U}_p$:
[Только для четных m]
[Для всех двоичных $(k \times n)$ -матриц $G^{(m/2)}$.]
Для всех $\pi \in \Pi_k$ и всех $\rho \in \Pi_n$:
Рассмотреть

$$G(D) = G^F(D) + [G^{(m/2)}D^{m/2}] + D^m \underline{G}^B(D^{-1}),$$

где $\underline{g}_{i,j}^B(D) = g_{\pi(i),\rho(j)}^B(D)$.

Если $G(D)$ не задает катастрофический кодер [1], вычислить его ДФСР (ДПР^(s)).

Оставить в $\mathcal{B}_m$ только те матрицы, которые имеют наилучшие ДФСР (ДПР^(s)) среди всех вычисленных.

4. Для всех пар матриц $G'(D), G''(D) \in \mathcal{B}_m$, $G'(D) \neq G''(D)$:
Для всех $\pi \in \Pi_k$ и всех $\rho \in \Pi_n$:
Если $G'(D)$ и $G''(D)$ тривиально эквивалентны, т.е. $g'_{i,j}(D) = g''_{\pi(i),\rho(j)}(D)$ для всех i, j или $g'_{i,j}(D) = \bar{g}''_{\pi(i),\rho(j)}(D)$ для всех i, j , удалить из $\mathcal{B}_m$ лексикографически большую из матриц $G'(D)$ и $G''(D)$.
5. Если требуется больше множеств, положить $m = m + 1$ и перейти к шагу 2.

На первом этапе этой процедуры мы проверяем, имеет ли порождающая матрица упорядоченные строки и столбцы, чтобы избежать повторных вычислений тождественных ПР эквивалентных кодеров, различающихся только порядком входов или выходов.

На втором этапе процедуры циклы по перестановкам строк и столбцов матриц $G^B(D)$ необходимы, поскольку хотя $d_{[0,p]} = \bar{d}_{[0,p]} = \hat{d}_{[0,p]} = d_{[0,p]}^*$ для всех таких кодов, вторая часть их ДФСР $\hat{d}_{[p+1,\infty]}^{(s)}$ (их ДПР^(s) $\hat{d}_{[p+1,m-s]}^{(s)}$) изменяется, и ее следует оптимизировать.

В большинстве случаев второй этап можно ускорить, пропуская цикл по двоичным матрицам $G^{(m/2)}$ (выделенный квадратными скобками и выполняемый только для четных m). Идея состоит в том, чтобы взять $G^F(D) = G^{[0,m/2]}(D)$ и выбирать в качестве этих матриц все элементы $\mathcal{U}_{m/2}$ вместо $\mathcal{U}_{m/2-1}$ и вычислять ДФСР (ДПР^(s)) всех конкатенаций. Отсюда следует, что $d_{m/2} = d_{m/2}^*$, но не обязательно $\bar{d}_{m/2} = d_{m/2}^*$. Однако если это последнее условие выполнено, что можно проверить после того как множество $\mathcal{B}_m$ полностью построено, то такое сокращение перебора не будет влиять на оптимальность $\hat{d}_{[0,m/2]}$.

При поиске ОДПР^(s)-кодов с $s \geq 2$ мы ограничиваемся случаем $m \geq 2s - 1$, чтобы упростить процедуру. Когда $m < 2s - 1$, конкатенация $G^F(D), G^B(D) \in \mathcal{U}_{(m-1)/2}$ для нечетных m или $G^F(D) \in \mathcal{U}_{m/2}$ и $G^B(D) \in \mathcal{U}_{m/2-1}$ для четных m может быть неоправданной, поскольку требуется лишь оптимальность $\hat{d}_{[0, m-s]}$, а поиск должен включать в себя цикл по всем “промежуточным” матрицам $G^{[m+1-s, s-1]}(D)$.

Для некоторых значений k и n следует рассматривать специальный случай $m = 1$ отдельно, выполняя при этом полный перебор по всем кодам, так как конкатенация $G^F(D), G^B(D) \in \mathcal{U}_0$ может давать только порождающие матрицы катастрофических кодов.

§ 3. Результаты поиска кодов

В общем случае, для заданных k, n и m ОДФСР- и ОДПР^(s)-коды не единственны. Для оптимизации их вероятности ошибки мы проводили дополнительный отбор по спектрам информационных расстояний $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots)$. Пусть событие ошибки означает путь в кодовой решетке, который начинается в нулевом состоянии, выходит из него в самом начале и возвращается в нулевое состояние только при своей терминеции. Тогда c_d – это сумма весов Хэмминга информационных последовательностей всех событий ошибок, кодовые слова которых имеют вес Хэмминга d . Как и ранее, мы полагаем $\mathbf{c} < \mathbf{c}'$, если $c_1 = c'_1, \dots, c_{\ell-1} = c'_{\ell-1}, c_\ell < c'_\ell$ для некоторого ℓ , и ищем наименьший $\mathbf{c}$ [14].

В табл. 1–6 приведены порождающие матрицы ОДФСР- и ОДПР^(s)-кодов для скоростей $1/2, 1/3, 1/4, 2/3, 2/4$ и $3/4$ в восьмеричной записи (с использованием правила, принятого в [7], т.е. с выравниваем влево), а также свободные расстояния этих кодов. Из-за недостатка места здесь приведены не все найденные нами коды; более полные результаты см. в [20].

В таблицах ОДПР^(s)-кодов перечислены только улучшенные коды. Здесь под “улучшенными” мы понимаем коды с лучшими спектрами информационных расстояний, чем у ОДПР^(s-1)-кодов (или ОДФСР-кодов при $s = 0$) с теми же k, n и m . Для $R = 3/4$ и $m = 3$ улучшенных ОДПР⁽²⁾-кодов нет.

Все эти коды имеют оптимизированные спектры информационных расстояний. Все матрицы единственны с точностью до инверсии и перестановок их строк или столбцов, за исключением случаев

- $R = 2/4$, ОДФСР, $m = 6$,
- $R = 2/4$, ОДПР⁽⁰⁾, $m = 4$,
- $R = 2/4$, ОДПР⁽²⁾, $m = 6$,

где коды имеют одинаковые спектры информационных расстояний, но их порождающие матрицы отличаются нетривиальным образом.

Таблица 1
ОДФСР/ОДПР-коды, $R = 1/2$

m	$G(D)$	d_∞
ОДФСР-коды		
1	[2 6]	3
2	[5 7]	5
3	[54 64]	6
4	[46 62]	6
5	[57 75]	8
6	[564 774]	8

7	[452 756]	10
8	[477 635]	10
9	[5414 6064]	10
10	[4522 6006]	9
11	[4417 6171]	12
12	[54464 60014]	11
13	[57276 76572]	12
14	[40375 71637]	12
15	[406564 710774]	16
16	[445222 611106]	14
17	[563477 771635]	16
18	[5632374 7713164]	18
19	[5574376 7513272]	20
20	[5736137 7643675]	18
21	[51265734 66263624]	21
22	[46701662 62153046]	21
23	[42544077 72625251]	22
24	[543567064 742331074]	23
25	[407402732 675600306]	21
26	[473063215 632451617]	24
27	[4624275754 6261156024]	26
28	[5665532672 6364242746]	22
29	[4644230357 7560621131]	24
30	[50160016024 67671635754]	26
31	[50107314766 67631561012]	26
Улучшенные ОДПР ⁽⁰⁾ -коды		
6	[534 724]	8
9	[4674 7544]	12
11	[4173 6605]	13
12	[52274 71664]	15
15	[440564 616714]	17
16	[445362 611036]	17
17	[401177 670535]	18
18	[4440574 6107364]	20
19	[4560552 6062726]	20
20	[4775443 6344455]	20
21	[50265354 67453424]	21
22	[46176562 62453546]	23
23	[41732353 70767461]	24
24	[415755274 704555144]	24
25	[416262512 706141156]	25
26	[512043315 731676517]	27
27	[4147233534 7053240024]	27
28	[4075047376 6757475322]	28
29	[4317713123 6562116075]	29
30	[46747737324 62131433034]	28
31	[46026512472 75150113146]	30
Улучшенные ОДПР ⁽¹⁾ -коды		
10	[4046 6772]	12
16	[406072 674546]	18
23	[50635563 72252135]	24

27	[4165155544 7064264114]	28
30	[51477667274 73460644664]	30
Улучшенные ОДПР ⁽²⁾ -коды, $m \geq 3$		
4	[46 72]	7
6	[434 724]	9
8	[435 657]	12
11	[4363 7335]	14
13	[42756 64712]	16
17	[434323 731231]	19
20	[4147563 6624135]	22
24	[417136244 707535014]	25
28	[4151623456 7041374442]	28
31	[55701344176 75157532472]	31
Улучшенные ОДПР ⁽³⁾ -коды, $m \geq 5$		
5	[53 75]	8
7	[452 766]	10
9	[4554 7524]	12
12	[46554 75624]	15
14	[52635 71077]	17
18	[4066164 7105374]	20
21	[44632424 76170134]	23
25	[415744152 704555326]	26
29	[4027363533 7175037345]	30
Улучшенные ОДПР ⁽⁴⁾ -коды, $m \geq 7$		
10	[4752 6166]	14
13	[43372 65446]	16
15	[412764 667114]	18
19	[5327632 7026236]	22
22	[42431526 72713352]	24
26	[506477557 722102055]	27
30	[52762256724 64643055434]	30
Улучшенные ОДПР ⁽⁵⁾ -коды, $m \geq 9$		
11	[4325 6747]	15
14	[42437 72711]	17
16	[551576 755072]	19
20	[4271771 6465163]	22
23	[40560411 67665743]	24
27	[4020517504 7170726534]	28
31	[42523570626 64546507642]	32

Таблица 2

ОДФСР/ОДПР-коды, $R = 1/3$

m	$G(D)$	d_∞
ОДФСР-коды		
1	[2 4 6]	4
2	[5 7 7]	8
3	[44 54 74]	9
4	[52 66 76]	12

5	[45 51 77]	12
6	[434 564 704]	13
7	[446 616 722]	14
8	[533 575 665]	15
9	[4674 6754 7544]	18
10	[5772 6056 7206]	18
11	[4135 5057 7263]	21
12	[51624 66234 71154]	22
13	[53256 65126 72552]	20
14	[40701 53765 67273]	22
15	[520454 644124 733334]	26
16	[403402 517712 730156]	24
17	[421765 531607 706321]	29
18	[4304304 5060254 6501424]	23
19	[4763236 6146306 7454762]	26
20	[5704623 6231075 7432617]	31
21	[46324714 54425344 62027664]	32
22	[40666602 53634752 67377566]	34
23	[51275623 66500617 71746075]	37
24	[551571614 616366264 770370374]	34
25	[527061652 641577756 737773026]	36
26	[533361127 650525053 724436665]	38
27	[4017417334 5150442624 7336076004]	38
28	[4333324526 5054103212 6522555542]	41
29	[4446061757 5406076103 7460043031]	38
30	[44137047714 63744372044 76211621174]	41
31	[40043101266 65362363716 71200036512]	45
Улучшенные ОДПР ⁽⁰⁾ -коды		
3	[54 64 74]	10
5	[43 57 71]	12
6	[474 514 764]	14
7	[466 536 662]	16
8	[575 623 727]	18
13	[40246 53322 67576]	22
25	[513467436 664525446 716556172]	41
28	[4430505436 5463114632 7432121422]	41
29	[4156353665 5272053621 6646554507]	44
Улучшенные ОДПР ⁽¹⁾ -коды		
1	[2 6 6]	5
5	[57 63 75]	12
9	[4464 5154 6374]	18
10	[4662 5646 6272]	20
27	[5040413754 6772040424 7075467434]	40
Улучшенные ОДПР ⁽²⁾ -коды, $m \geq 3$		
5	[45 53 67]	12
6	[514 564 674]	15
7	[456 646 772]	16
10	[4732 5562 6346]	21
15	[431724 507134 651654]	28
16	[472562 571076 761172]	28
21	[43617114 50176144 65531464]	34

24	[522211124 730404334]	35
28	[4331523516 5216527052 7134531542]	44
Улучшенные ОДПР ⁽³⁾ -коды, $m \geq 5$		
5	[47 53 75]	13
6	[474 534 664]	15
7	[452 662 756]	16
9	[4754 5324 6744]	20
12	[42664 53714 70344]	23
17	[422543 662711 725135]	29
18	[5373724 6575134 7227654]	26
20	[4602545 5611033 7747647]	33
26	[410707237 506133675 724647071]	41
Улучшенные ОДПР ⁽⁴⁾ -коды, $m \geq 7$		
9	[4714 5334 7724]	20
10	[4456 6546 7672]	22
11	[4551 5157 7353]	22
13	[42162 51572 64476]	24
14	[45755 55163 75271]	27
16	[431516 675542 731052]	28
19	[4340472 5270746 7165336]	32
21	[40555364 65473174 71462344]	35
22	[42105642 66074416 72756752]	36
24	[455116344 574065364 603503174]	39
26	[432166577 504132623 653567051]	42
29	[5341100365 6555670627 7205114353]	44
31	[41775322742 64230711252 70124437316]	48
Улучшенные ОДПР ⁽⁵⁾ -коды, $m \geq 9$		
9	[4764 5134 6674]	20
10	[4652 5662 7716]	22
11	[4671 6625 7537]	24
12	[47274 51454 63364]	24
15	[451464 556414 756174]	28
17	[426163 664435 722757]	32
18	[5361654 6561724 7237134]	31
20	[4610365 5460353 6233627]	34
22	[41070752 52326416 66353642]	37
23	[46652143 56623517 77044371]	38
29	[4252213203 6666141151 7206766575]	45
30	[41056336124 50665003304 72432267234]	46

Таблица 3

ОДФСР/ОДПР-коды, $R = 1/4$

m	$G(D)$	d_∞
ОДФСР-коды		
1	[2 4 6 6]	6
2	[5 5 7 7]	10
3	[44 54 64 74]	12
4	[46 56 62 72]	14
5	[45 51 67 73]	16

6	[434 564 614 704]	17
7	[406 536 602 752]	18
8	[471 525 603 727]	21
9	[4314 5704 6174 7024]	22
10	[4102 5756 6106 7372]	24
11	[4633 5647 6631 7135]	30
12	[41204 52524 62074 74114]	25
13	[47516 57666 66772 71362]	32
14	[41057 52225 60503 75041]	27
15	[435314 503024 632704 760174]	34
16	[467516 545232 661066 713662]	38
17	[442753 564627 657211 723135]	40
18	[4665544 5440464 6604154 7121234]	38
19	[4733366 5746156 6755562 7306372]	38
20	[4502051 5535655 6465507 7055313]	45
21	[41256354 52575164 62006044 74145334]	44
22	[40153002 51135112 63027276 76564146]	46
23	[47015547 57277275 66036033 71554071]	44
24	[433163304 525446524 616735614 746161474]	48
25	[422044512 512220442 605716076 760717206]	48
26	[404671717 510050045 621451423 747473101]	50
27	[4666466064 5415455544 6454006454 7011462034]	50
Улучшенные ОДПР ⁽⁰⁾ -коды		
7	[446 516 622 712]	18
8	[451 525 623 727]	21
10	[4422 5766 6772 7356]	26
11	[4427 5633 6551 7375]	30
21	[44736564 56573444 67431734 73630754]	46
Улучшенные ОДПР ⁽¹⁾ -коды		
1	[2 6 6 6]	7
6	[444 564 654 734]	19
7	[466 562 636 752]	22
8	[471 525 677 773]	22
10	[4116 5262 6266 7572]	27
18	[4576664 5557644 6425054 7004034]	40
20	[4076427 5363235 6155333 7422331]	46
21	[40236644 53771134 63422764 75637154]	46
Улучшенные ОДПР ⁽²⁾ -коды, $m \geq 3$		
8	[455 571 647 733]	24
9	[4744 5564 6374 7514]	24
10	[4546 5532 6162 7736]	28
11	[4563 5537 6531 7235]	31
15	[443644 560034 672664 731054]	35
21	[43553134 50374764 63210644 76045154]	49
Улучшенные ОДПР ⁽³⁾ -коды, $m \geq 5$		
6	[454 534 664 744]	19
8	[457 565 633 771]	24
9	[4554 5534 6164 7644]	26
10	[4532 5656 6326 7722]	28
15	[435424 506704 615374 772614]	36

Улучшенные ОДПР ⁽⁴⁾ -коды, $m \geq 7$		
8	[455 523 671 757]	24
9	[4624 5344 6654 7574]	27
10	[4272 5176 6662 7246]	28
11	[4555 5247 6371 7273]	31
12	[45264 57634 64554 72344]	33
19	[4153362 5234356 6243572 7444166]	44
20	[4533731 5502433 6441647 7074515]	46
22	[47153556 57650766 67612772 73353162]	50
Улучшенные ОДПР ⁽⁵⁾ -коды, $m \geq 9$		
10	[4566 5162 6552 7636]	29
11	[4527 5433 6471 7375]	31
12	[45534 50564 63754 71544]	33
13	[43372 52722 65546 71176]	36
14	[44207 56151 67355 73013]	33
15	[423354 532544 614564 774434]	38
21	[42647164 51270354 62464044 77553334]	50
23	[45704327 55073553 65567055 72610751]	48
27	[4126442534 5254267444 6202134254 7416644164]	55

Таблица 4
ОДФСР/ОДПР-коды, $R = 2/3$

m	$G(D)$	d_∞
ОДФСР-коды		
1	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 4 \end{bmatrix}$	3
2	$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 7 & 2 & 7 \end{bmatrix}$	5
3	$\begin{bmatrix} 04 & 60 & 74 \\ 40 & 34 & 54 \end{bmatrix}$	6
4	$\begin{bmatrix} 00 & 46 & 62 \\ 42 & 34 & 56 \end{bmatrix}$	6
5	$\begin{bmatrix} 05 & 40 & 73 \\ 67 & 01 & 50 \end{bmatrix}$	8
6	$\begin{bmatrix} 024 & 664 & 770 \\ 420 & 104 & 604 \end{bmatrix}$	7
7	$\begin{bmatrix} 130 & 462 & 642 \\ 462 & 150 & 426 \end{bmatrix}$	10
8	$\begin{bmatrix} 020 & 673 & 757 \\ 505 & 174 & 623 \end{bmatrix}$	10
9	$\begin{bmatrix} 0324 & 6670 & 7614 \\ 7674 & 0444 & 5320 \end{bmatrix}$	13
Улучшенные ОДПР ⁽⁰⁾ -коды		
2	$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$	5

3	$\begin{bmatrix} 04 & 54 & 60 \\ 50 & 14 & 54 \end{bmatrix}$	6
4	$\begin{bmatrix} 10 & 52 & 66 \\ 42 & 34 & 76 \end{bmatrix}$	8
5	$\begin{bmatrix} 25 & 55 & 76 \\ 63 & 16 & 45 \end{bmatrix}$	10
6	$\begin{bmatrix} 100 & 524 & 744 \\ 514 & 350 & 554 \end{bmatrix}$	10
7	$\begin{bmatrix} 126 & 444 & 662 \\ 742 & 126 & 700 \end{bmatrix}$	12
8	$\begin{bmatrix} 037 & 473 & 532 \\ 676 & 317 & 633 \end{bmatrix}$	13
9	$\begin{bmatrix} 0070 & 5664 & 7244 \\ 4624 & 3344 & 7700 \end{bmatrix}$	14
Улучшенные ОДПР ⁽¹⁾ -коды		
4	$\begin{bmatrix} 14 & 56 & 62 \\ 46 & 34 & 76 \end{bmatrix}$	8
7	$\begin{bmatrix} 156 & 464 & 716 \\ 560 & 352 & 602 \end{bmatrix}$	12
Улучшенные ОДПР ⁽²⁾ -коды, $m \geq 3$		
3	$\begin{bmatrix} 30 & 54 & 54 \\ 54 & 30 & 74 \end{bmatrix}$	7
8	$\begin{bmatrix} 053 & 406 & 755 \\ 421 & 361 & 712 \end{bmatrix}$	13

Таблица 5

ОДФСР/ОДПР-коды, $R = 2/4$

m	$G(D)$	d_∞
ОДФСР-коды		
1	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$	5
2	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$	6
3	$\begin{bmatrix} 14 & 34 & 54 & 74 \\ 70 & 60 & 74 & 64 \end{bmatrix}$	8
4	$\begin{bmatrix} 00 & 24 & 46 & 72 \\ 76 & 52 & 04 & 30 \end{bmatrix}$	9
5	$\begin{bmatrix} 04 & 35 & 52 & 77 \\ 73 & 67 & 67 & 73 \end{bmatrix}$	12
6	$\begin{bmatrix} 064 & 210 & 540 & 654 \\ 540 & 654 & 064 & 210 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 064 & 250 & 540 & 614 \\ 540 & 614 & 064 & 250 \end{bmatrix}$	13
7	$\begin{bmatrix} 024 & 226 & 540 & 632 \\ 546 & 644 & 032 & 240 \end{bmatrix}$	14
Улучшенные ОДПР ⁽⁰⁾ -коды		
3	$\begin{bmatrix} 04 & 30 & 54 & 60 \\ 74 & 44 & 34 & 04 \end{bmatrix}$	8

4	$\begin{bmatrix} 06 & 34 & 52 & 70 \\ 70 & 52 & 34 & 06 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 & 22 & 54 & 76 \\ 76 & 54 & 22 & 10 \end{bmatrix}$	11
5	$\begin{bmatrix} 05 & 34 & 47 & 62 \\ 65 & 47 & 25 & 17 \end{bmatrix}$		12
6	$\begin{bmatrix} 014 & 354 & 544 & 704 \\ 770 & 640 & 664 & 734 \end{bmatrix}$		15
7	$\begin{bmatrix} 052 & 276 & 444 & 730 \\ 674 & 460 & 062 & 326 \end{bmatrix}$		17
Улучшенные ОДПР ⁽¹⁾ -коды			
5	$\begin{bmatrix} 04 & 36 & 55 & 73 \\ 71 & 73 & 42 & 44 \end{bmatrix}$		13
7	$\begin{bmatrix} 130 & 252 & 466 & 654 \\ 662 & 446 & 226 & 162 \end{bmatrix}$		17
Улучшенные ОДПР ⁽²⁾ -коды, $m \geq 3$			
5	$\begin{bmatrix} 12 & 34 & 47 & 75 \\ 63 & 55 & 34 & 16 \end{bmatrix}$		14
6	$\begin{bmatrix} 044 & 360 & 534 & 730 \\ 730 & 534 & 360 & 044 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 130 & 214 & 560 & 764 \\ 764 & 560 & 214 & 130 \end{bmatrix}$		16

Таблица 6
ОДФСР-коды, $R = 3/4$

m	$G(D)$	d_∞
ОДФСР-коды		
1	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 6 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	3
2	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 7 \\ 7 & 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$	5
3	$\begin{bmatrix} 04 & 34 & 40 & 70 \\ 34 & 44 & 34 & 64 \\ 70 & 54 & 70 & 44 \end{bmatrix}$	6
Улучшенные ОДПР ⁽⁰⁾ -коды		
1	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$	4
2	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 7 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$	5
3	$\begin{bmatrix} 10 & 14 & 44 & 70 \\ 10 & 70 & 14 & 44 \\ 44 & 10 & 34 & 60 \end{bmatrix}$	8
Улучшенные ОДПР ⁽¹⁾ -коды		
2	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 7 \\ 6 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	6

В табл. 7–12 приведены сводные результаты о свободных расстояниях $d_\infty^{(s)}$ для ОДПР^(s)-кодов (как и ранее, только для улучшенных кодов). Для каждого множества параметров k , n и m вычислена соответствующая верхняя граница Грайсмера d_∞^G на свободное расстояние как наибольшее d_∞ , удовлетворяющее неравенству [1]

$$\sum_{\ell=0}^{ki-1} \left\lceil \frac{d_\infty}{2^\ell} \right\rceil \leq (m+i)n \quad (12)$$

для всех $i = 1, 2, \dots$. Видно, что некоторые из перечисленных кодов, в основном при малых значениях m , также оптимальны по свободному расстоянию.

Аналогичная процедура поиска кодов, подходящих для двустороннего декодирования, представлена в [17] для $R = 1/2$. Чтобы уменьшить объем поиска, авторы ограничиваются так называемыми симметричными кодами, обладающими тем свойством, что $g_1(D) = \bar{g}_{\pi(1)}(D)$ и $g_2(D) = \bar{g}_{\pi(2)}(D)$, где $G(D) = [g_1(D) \ g_2(D)]$ и $\pi \in \Pi_2$, и тем самым, такими что $\mathbf{d} = \bar{\mathbf{d}}$. Сначала выполняется поиск симметричных кодов с $d_{[0,m]} = d_{[0,m]}^*$, и из них выбирается код, имеющий наилучший спектр расстояний. Если таких кодов нет, поиск выполняется снова, но на этот раз с ослабленным условием $d_{[0,m-4]} = d_{[0,m-4]}^*$. Из-за налагаемого условия симметрии при некоторых значениях m коды, приведенные в [17], имеют несколько меньшие свободные расстояния, чем наши.

Таблица 7
Свободное расстояние $d_\infty^{(s)}$, $R = 1/2$

m	s							d_∞^G
	$-\infty$	0	1	2	3	4	5	
1	3			–	–	–	–	4
2	5			–	–	–	–	5
3	6				–	–	–	6
4	6			7	–	–	–	8
5	8				8	–	–	8
6	8	8		9		–	–	10
7	10				10		–	11
8	10			12			–	12
9	10	12			12			13
10	9		12			14		14
11	12	13		14			15	16
12	11	15			15			16
13	12			16		16		17
14	12				17		17	18
15	16	17				18		20
16	14	17	18				19	20
17	16	18		19				22
18	18	20			20			23
19	20	20				22		24
20	18	20		22			22	24
21	21	21			23			26
22	21	23				24		27
23	22	24	24				24	28
24	23	24		25				29
25	21	25			26			30
26	24	27				27		32

27	26	27	28			28	32
28	22	28		28			32
29	24	29			30		34
30	26	28	30			30	35
31	26	30		31		32	36

Таблица 8

Свободное расстояние $d_{\infty}^{(s)}$, $R = 1/3$

m	s							d_{∞}^G
	$-\infty$	0	1	2	3	4	5	
1	4		5	—	—	—	—	6
2	8			—	—	—	—	8
3	9	10			—	—	—	10
4	12				—	—	—	12
5	12	12	12	12	13	—	—	13
6	13	14		15	15	—	—	15
7	14	16		16	16		—	16
8	15	18					—	18
9	18		18		20	20	20	20
10	18		20	21		22	22	22
11	21					22	24	24
12	22				23		24	24
13	20	22				24		26
14	22					27		28
15	26			28			28	30
16	24			28		28		32
17	29				29		32	32
18	23				26		31	34
19	26					32		36
20	31				33		34	38
21	32			34		35		40
22	34					36	37	40
23	37						38	42
24	34			35		39		44
25	36	41						46
26	38				41	42		48
27	38		40					48
28	41	41		44				50
29	38	44				44	45	52
30	41						46	53
31	45					48		55

Таблица 9

Свободное расстояние $d_{\infty}^{(s)}$, $R = 1/4$

m	s							d_{∞}^G
	$-\infty$	0	1	2	3	4	5	
1	6		7	—	—	—	—	8
2	10			—	—	—	—	10
3	12				—	—	—	13

4	14				–	–	–	16
5	16					–	–	18
6	17		19		19	–	–	20
7	18	18	22				–	22
8	21	21	22	24	24	24	–	24
9	22			24	26	27		27
10	24	26	27	28	28	28	29	29
11	30	30		31		31	31	32
12	25					33	33	33
13	32						36	36
14	27						33	38
15	34			35	36		38	40
16	38							42
17	40							44
18	38		40					46
19	38					44		48
20	45		46			46		50
21	44	46	46	49			50	52
22	46					50		55
23	44						48	56
24	48							59
25	48							61
26	50							64
27	50						55	64

Таблица 10

Свободное расстояние $d_{\infty}^{(s)}$, $R = 2/3$

m	s				d_{∞}^G
	$-\infty$	0	1	2	
1	3			–	4
2	5	5		–	6
3	6	6		7	8
4	6	8	8		8
5	8	10			10
6	7	10			12
7	10	12	12		14
8	10	13		13	16
9	13	14			16

§ 4. Характеристики кодов

Для сравнения ОДПР^(s)-кодов с другими кодами, используемыми на практике, мы провели моделирование их вероятности ошибки на блок (FER) и сложности декодирования. В моделировании мы использовали следующие алгоритмы декодирования:

- Алгоритм Витерби (VA),
- Стек-алгоритм (SA) [2, 3],
- Двусторонний стек-алгоритм (BSA) [17].

Таблица 11

Свободное расстояние $d_{\infty}^{(s)}$, $R = 2/4$

m	s				d_{∞}^G
	$-\infty$	0	1	2	
1	5			–	5
2	6			–	8
3	8	8			10
4	9	11			12
5	12	12	13	14	14
6	13	15		16	16
7	14	17	17		18

Таблица 12

Свободное расстояние $d_{\infty}^{(s)}$, $R = 3/4$

m	s				d_{∞}^G
	$-\infty$	0	1	2	
1	3	4		–	4
2	5	5	6	–	6
3	6	8			8

Таблица 13

Коды, использованные при моделировании

R	m	Код	$G(D)$; Описание	d_{∞}
1/3	6	$C_{1/3,6}^{\text{ОСпР}}$	[554 724 744]; ОСпР, обозначенный через [133 165 171] в [14]	15
	12	$C_{1/3,12}^{\text{ОСпР}}$	[55304 64734 76244]; ОСпР, обозначенный через [13261 15167 17451] в [14]	24
	19	$C_{1/3,19}^{\text{ОПР}}$	[5531236 6151572 7731724]; ОПР [1]	35
	19	$C_{1/3,19}^{\text{ОДПР}}$	[4340472 5270746 7165336]; ОДПР ⁽⁴⁾	32
	31	$C_{1/3,31}^{\text{ОДПР}}$	[41775322742 64230711252 70124437316]; ОДПР ⁽⁴⁾	48
1/4	6	$C_{1/4,6}^{\text{ОСпР}}$	[474 534 664 744]; ОСпР, обозначенный через [117 127 155 171] в [14]	20
	12	$C_{1/4,12}^{\text{ОСвР}}$	[46254 56374 65044 75564]; ОСД, обозначенный через [11453 13477 15211 17335] в [13]	33
	21	$C_{1/4,21}^{\text{ОПР}}$	[45724414 55057474 65556514 72624710]; ОПР [1]	50
	21	$C_{1/4,21}^{\text{ОДПР}}$	[43553134 50374764 63210644 76045154]; ОДПР ⁽²⁾	49
	27	$C_{1/4,27}^{\text{ОДПР}}$	[4126442534 5254267444 6202134254 7416644164]; ОДПР ⁽⁵⁾	55

Коды, использовавшиеся при моделировании, перечислены в табл. 13, где через ОСвР обозначено оптимальное свободное расстояние, а через ОСпР – оптимальный спектр расстояний кодов.

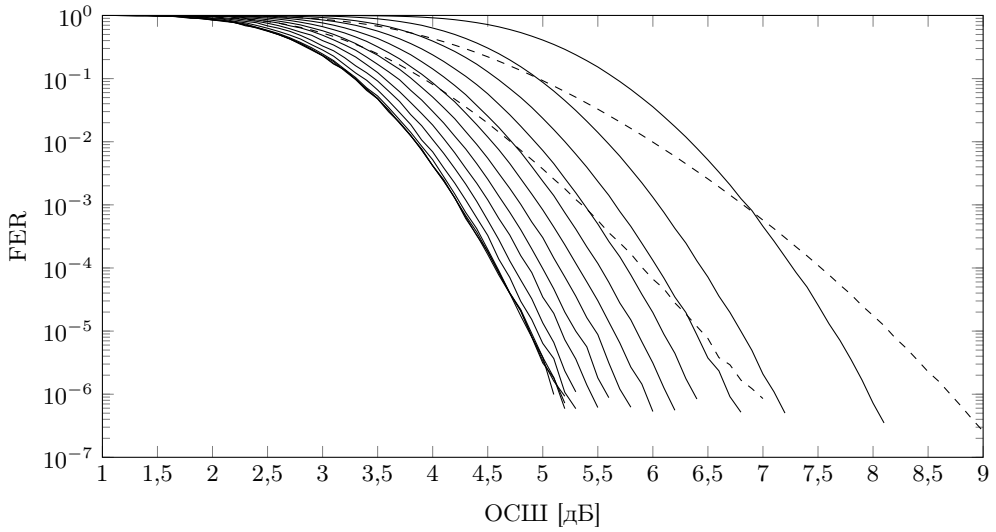


Рис. 1. FER, $R = 1/3$:
 --- $VA(C_{1/3,6}^{OC\Pi P}), VA(C_{1/3,12}^{OC\Pi P})$, — $BSA(C_{1/3,31}^{OD\Pi P}, \{2^{10}, 2^{11}, \dots, 2^{24}\})$

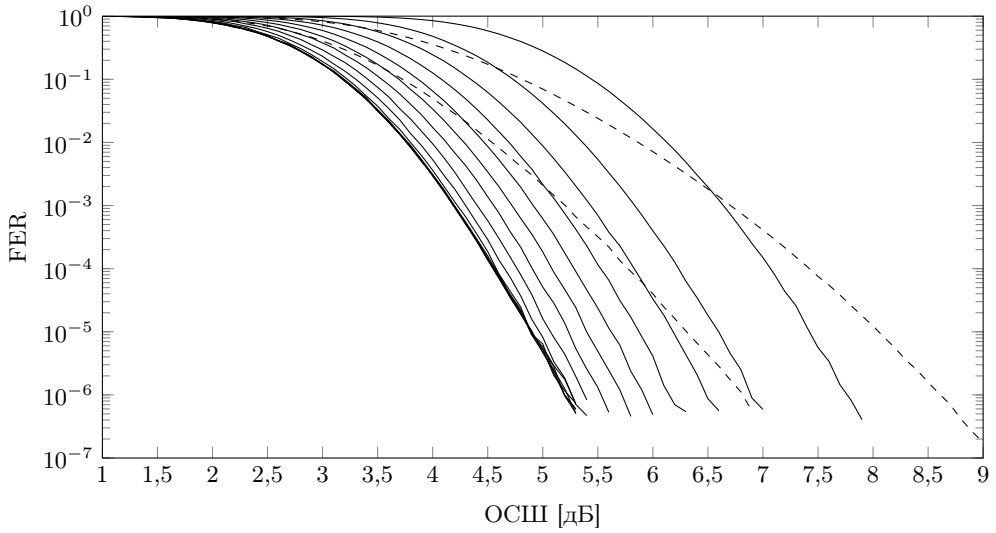


Рис. 2. FER, $R = 1/4$:
 --- $VA(C_{1/4,6}^{OC\Pi P}), VA(C_{1/4,12}^{OC\Pi P})$, — $BSA(C_{1/4,27}^{OD\Pi P}, \{2^{10}, 2^{11}, \dots, 2^{24}\})$

Во всех экспериментах длина информационной последовательности составляла $K = 224$ двоичных символов, а длина кодовых слов с нулевым усечением — $(K/k+m)n$ двоичных символов, в зависимости от используемого кода. Использовался АБГШ-канал с двоичным входом и симметричным биполярным отображением, а отношение сигнал/шум (ОСШ) определяется как $10 \log_{10}(E_b/N_0)$, где E_b — энергия на один информационный символ, а N_0 — односторонняя спектральная плотность мощности шума.

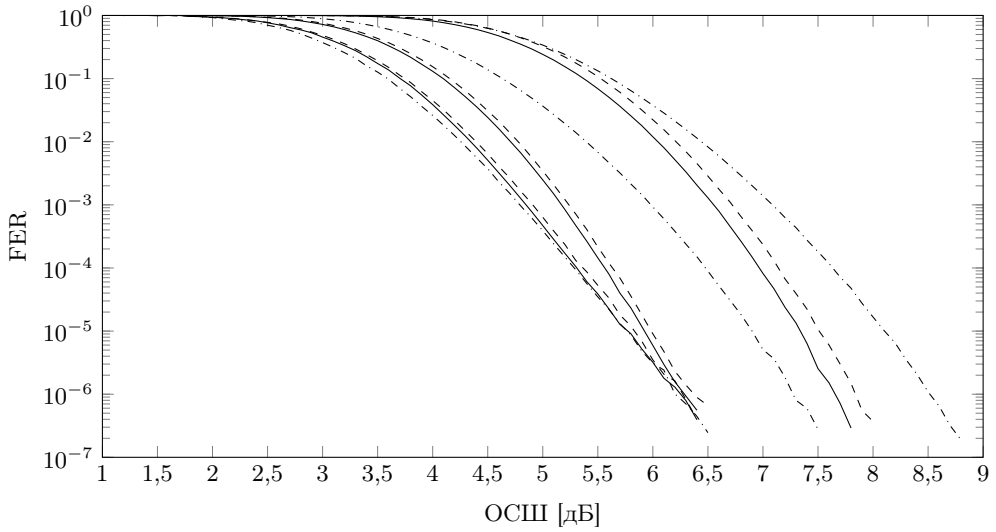


Рис. 3. FER, $R = 1/3$:
 - · - - $SA(C_{1/3,19}^{OPP}, \{2^{10}, 2^{13}, 2^{24}\})$, - - - $BSA(C_{1/3,19}^{OPP}, \{2^{10}, 2^{13}, 2^{24}\})$,
 — $BSA(C_{1/3,19}^{ODPP}, \{2^{10}, 2^{13}, 2^{24}\})$

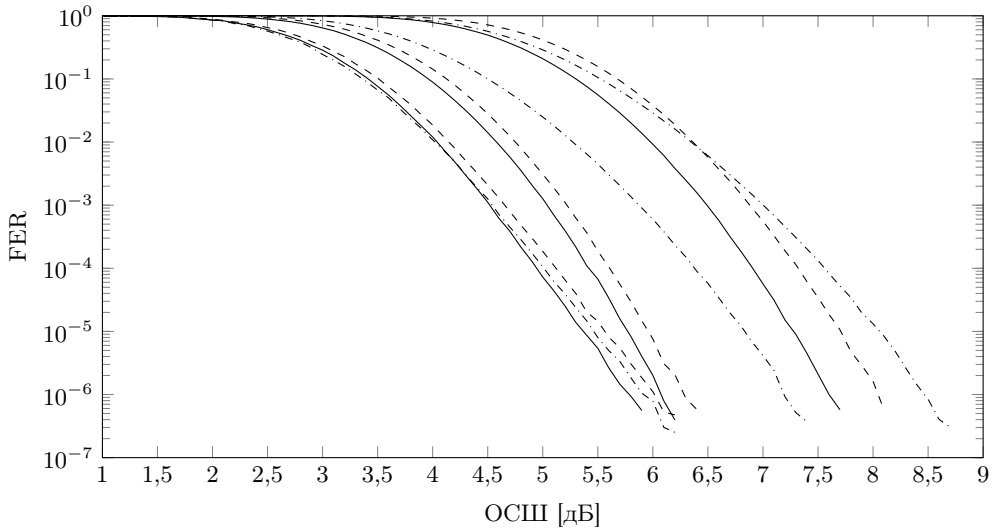


Рис. 4. FER, $R = 1/4$:
 - · - - $SA(C_{1/4,21}^{OPP}, \{2^{10}, 2^{13}, 2^{24}\})$, - - - $BSA(C_{1/4,21}^{OPP}, \{2^{10}, 2^{13}, 2^{24}\})$,
 — $BSA(C_{1/4,21}^{ODPP}, \{2^{10}, 2^{13}, 2^{24}\})$

В описании всех результатов моделирования через $A(C)$ мы обозначаем применение алгоритма A к декодированию последовательностей кода C , и аналогично $A(C, M)$ в случае, когда в кодовое дерево (деревья) вставляется не более M узлов. В этом последнем случае M также может быть множеством значений, если их воздействие анализируется совместно.

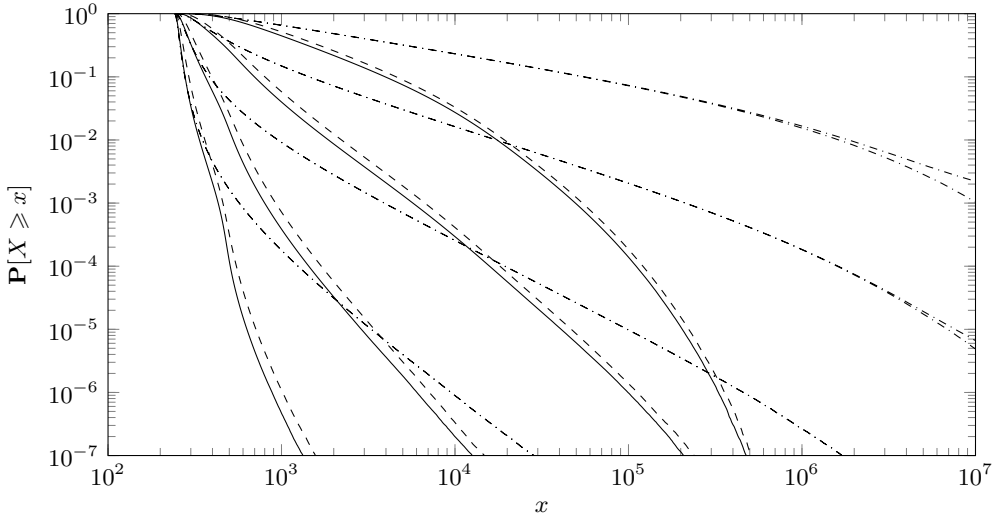


Рис. 5. Сложность декодирования, $R = 1/3$, сверху вниз ОСШ [дБ] = 4, 5, 6, 7:
 - · - - - $SA(C_{1/3,19}^{ОПР}$ (границы), - - - $BSA(C_{1/3,19}^{ОПР})$, — $BSA(C_{1/3,19}^{ОДПР})$

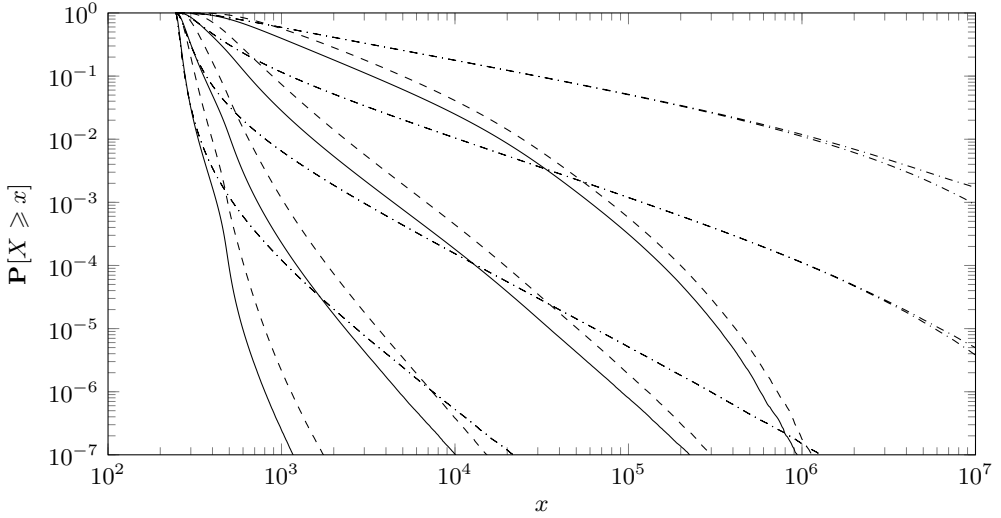


Рис. 6. Сложность декодирования, $R = 1/4$, сверху вниз ОСШ [дБ] = 4, 5, 6, 7:
 - · - - - $SA(C_{1/4,21}^{ОПР}$ (границы), - - - $BSA(C_{1/4,21}^{ОПР})$, — $BSA(C_{1/4,21}^{ОДПР})$

4.1. Сравнение с декодированием по Витерби. На рис. 1, 2 показаны результаты сравнения полученных при моделировании вероятностей ошибки на блок (FER) для BSA-декодирования выбранных ОДПР-кодов и декодирования по Витерби (по максимальному правдоподобию) ОСвР- и ОСпР-кодов с меньшей памятью для скоростей $1/3$ и $1/4$. ОДПР-коды, которые использовались для этого сравнения, – это коды с наибольшей памятью среди найденных.

Результаты BSA-декодирования приведены для различного максимально допустимого количества узлов, вставляемых в кодовые деревья (максимального общего

Таблица 14

Среднее число промежуточных узлов, $R = 1/3$

ОСШ [дБ]	SA($C_{1/3,19}^{\text{ОПР}}$), н.г.	BSA($C_{1/3,19}^{\text{ОПР}}$)	BSA($C_{1/3,19}^{\text{ОДПР}}$)
4	81000	2221,87	1950,36
5	2053,29	538,329	480,53
6	328,403	319,052	300,176
7	260,336	268,519	260,128

Таблица 15

Среднее число промежуточных узлов, $R = 1/4$

ОСШ [дБ]	SA($C_{1/4,21}^{\text{ОПР}}$), н.г.	BSA($C_{1/4,21}^{\text{ОПР}}$)	BSA($C_{1/4,21}^{\text{ОДПР}}$)
4	61758,3	2582,11	1831,05
5	1460,96	590,712	452,307
6	316,926	347,656	298,378
7	261,146	284,164	261,333

размера дерева), и кривые FER от верхней к нижней соответствуют его возрастающим значениям. Ошибками считаются как ситуация, когда декодер достигает максимального общего размера дерева без результата (отказ от декодирования), так и ситуация, когда он выдает неправильную декодированную последовательность. Мы видим, что для обеих скоростей кода в некоторый момент эта зависимость стабилизируется, когда FER начинает определяться только свойствами кода (свободным расстоянием и спектром расстояний).

Поскольку элементарные операции, выполняемые при BSA-декодировании и декодировании по Витерби, различны, не существует однозначного способа сравнения вычислительной эффективности этих двух алгоритмов, тем более что различные оптимизации обоих алгоритмов могут существенно повлиять на их суммарную сложность по времени и памяти. Однако точки пересечения кривых FER и соответствующие максимальные размеры деревьев BSA-алгоритма могут служить грубой оценкой того, насколько BSA-декодирование выгоднее декодирования по Витерби для конкретного приложения, т.е. когда известны ожидаемое ОСШ в канале и ограничения на аппаратные и/или программные возможности декодера.

4.2. Сравнение для последовательного декодирования. На рис. 3, 4 показаны полученные при моделировании значения FER для следующих случаев:

- SA-декодирование ОПР-кодов,
- BSA-декодирование ОПР-кодов,
- BSA-декодирование ОДПР-кодов.

Используются те же скорости, что и в предыдущем сравнении. Во всех экспериментах коды в сравниваемых системах имеют одинаковую память. Снова в качестве изменяемого параметра берется максимальный общий размер дерева M , а ошибками считаются как отказы от декодирования, так и неверные результаты.

При $R = 1/3$ результаты для ОДПР-кодов при различных значениях M оказываются на $\approx 0,05 - 0,2$ дБ лучше, чем для ОПР-кодов, в то время как при $R = 1/4$ отличие составляет $\approx 0,2 - 0,4$ дБ. Интересно отметить, что в большинстве случаев SA-декодирование ОПР-кодов уступает BSA-декодированию ОПР- или ОДПР-кодов, кроме случаев ($R = 1/3$, $M = 2^{24}$) и ($R = 1/4$, $M = 2^{24}$), когда они очень близки.

На рис. 5, 6 показаны распределения величины X – числа промежуточных узлов кодового дерева (деревьев) в случае, когда декодирование выдает правильную последовательность. Когда число промежуточных узлов становится слишком боль-

шим и декодирование конкретной полученной последовательности прерывается из-за практических ограничений, мы не можем определить, является ли декодированная последовательность правильной. Поэтому в некоторых результатах для SA-декодирования приведены лишь границы на распределение X . Как для $R = 1/3$, так и для $R = 1/4$ видно улучшение при использовании ОДПР-кодов. Видно также, что в большинстве случаев BSA-декодирование имеет меньшую среднюю сложность, чем SA-декодирование. Сводные данные о среднем числе промежуточных узлов приведены в табл. 14, 15, где для SA-декодирования указаны нижние границы (н.г.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Johannesson R., Zigangirov K.Sh.* Fundamentals of Convolutional Coding. Piscataway, NJ: IEEE Press; Hoboken, NJ: Wiley, 2015.
2. *Зигангиров К.Ш.* Некоторые последовательные процедуры декодирования // Пробл. передачи информ. 1966. Т. 2. № 4. С. 13–25. <https://www.mathnet.ru/ppi1966>
3. *Jelinek F.* Fast Sequential Decoding Algorithm Using a Stack // IBM J. Res. Develop. 1969. V. 13. № 6. P. 675–685. <https://doi.org/10.1147/rd.136.0675>
4. *Fano R.M.* A Heuristic Discussion of Probabilistic Decoding // IEEE Trans. Inform. Theory. 1963. V. 9. № 2. P. 64–74. <https://doi.org/10.1109/TIT.1963.1057827>
5. *Chevillat P., Costello D.* An Analysis of Sequential Decoding for Specific Time-Invariant Convolutional Codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1978. V. 24. № 4. P. 443–451. <https://doi.org/10.1109/TIT.1978.1055916>
6. *Narayanaswamy B., Negi R., Khosla P.* An Analysis of the Computational Complexity of Sequential Decoding of Specific Tree Codes over Gaussian Channels // Proc. 2008 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT'2008). Toronto, ON, Canada. July 6–11, 2008. P. 2508–2512. <https://doi.org/10.1109/ISIT.2008.4595443>
7. *Johannesson R.* Robustly Optimal Rate One-Half Binary Convolutional Codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1975. V. 21. № 4. P. 464–468. <https://doi.org/10.1109/TIT.1975.1055397>
8. *Johannesson R.* Some Long Rate One-Half Binary Convolutional Codes with an Optimum Distance Profile // IEEE Trans. Inform. Theory. 1976. V. 22. № 5. P. 629–631. <https://doi.org/10.1109/TIT.1976.1055599>
9. *Johannesson R.* Some Rate 1/3 and 1/4 Binary Convolutional Codes with an Optimum Distance Profile // IEEE Trans. Inform. Theory. 1977. V. 23. № 2. P. 281–283. <https://doi.org/10.1109/TIT.1977.1055687>
10. *Hagenauer J.* High Rate Convolutional Codes with Good Distance Profiles // IEEE Trans. Inform. Theory. 1977. V. 23. № 5. P. 615–618. <https://doi.org/10.1109/TIT.1977.1055777>
11. *Johannesson R., Paaske E.* Further Results on Binary Convolutional Codes with an Optimum Distance Profile // IEEE Trans. Inform. Theory. 1978. V. 24. № 2. P. 264–268. <https://doi.org/10.1109/TIT.1978.1055850>
12. *Johannesson R., Ståhl P.* New Rate 1/2, 1/3, and 1/4 Binary Convolutional Encoders with an Optimum Distance Profile // IEEE Trans. Inform. Theory. 1999. V. 45. № 5. P. 1653–1658. <https://doi.org/10.1109/18.771238>
13. *Sone N., Mohri M., Morii M., Sasano H.* Optimal Free Distance Convolutional Codes for Rates 1/2, 1/3, and 1/4 // Electron. Lett. 1999. V. 35. № 15. P. 1240–1241. <https://doi.org/10.1049/el:19990871>
14. *Frenger P., Orten P., Ottosson T.* Convolutional Codes with Optimum Distance Spectrum // IEEE Commun. Lett. 1999. V. 3. № 11. P. 317–319. <https://doi.org/10.1109/4234.803468>
15. *Hug F.* Codes on Graphs and More: Ph.D. Thesis. Dept. of Electrical and Information Technology, Lund Univ., Lund, Sweden, 2012.
16. *Šenk V., Radivojac P.* The Bidirectional Stack Algorithm // Proc. 1997 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT'97). Ulm, Germany. June 29–July 4, 1997. P. 500. <https://doi.org/10.1109/ISIT.1997.613437>

17. Kallel S., Li K. Bidirectional Sequential Decoding // IEEE Trans. Inform. Theory. 1997. V. 43. № 4. P. 1319–1326. <https://doi.org/10.1109/18.605602>
18. Bocharova I.E., Handlery M., Johannesson R., Kudryashov B.D. BEAST Decoding of Block Codes Obtained via Convolutional Codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 2005. V. 51. № 5. P. 1880–1891. <https://doi.org/10.1109/TIT.2005.846448>
19. Xu R., Kocak T., Woodward G., Morris K., Dolwin C. High Throughput Parallel Fano Decoding // IEEE Trans. Commun. 2011. V. 59. № 9. P. 2394–2405. <https://doi.org/10.1109/TCOMM.2011.062011.100236>
20. Stanojević I., Šenk V. Convolutional Codes with Optimum Bidirectional Distance Profile, <https://arXiv:2210.15787v4> [cs.IT], 2022.

Станоевич Иван (Stanojević, Ivan)
 Шенк Войин (Šenk, Vojin)
 Факультет технических наук,
 Университет г. Нови-Сад, Сербия
 cet_ivan@uns.ac.rs
 vojinn_senk@uns.ac.rs

Поступила в редакцию
 11.11.2022
 После доработки
 05.12.2023
 Принята к публикации
 06.12.2023