

УДК 621.391.8

© 2025 г. А.М. Чуднов, В.В. Сазонов, В.Р. Бикбулатов

**ОПТИМИЗАЦИЯ ОБЛАСТИ НЕРАЗЛИЧИМОСТИ ПРИЕМНИКОМ  
ДВОИЧНЫХ СИГНАЛОВ, ПЕРЕДАВАЕМЫХ ПО КАНАЛУ  
С ПРЕДНАМЕРЕННОЙ ПОМЕХОЙ**

Для приема двоичных псевдослучайных сигналов в условиях воздействия преднамеренной помехи вводится рандомизированное решающее правило с областью неразличимости принимаемых сигналов. Установлено, что для сигналов с базой  $n \leq 2$  построенное правило приемника обеспечивает повышение помехоустойчивости системы передачи информации в классе помех с ограниченной средней мощностью по отношению к приемнику Котельникова. Полученное при этом значение гарантированной вероятности ошибки улучшает актуальную верхнюю границу для данной величины.

*Ключевые слова:* алгоритм формирования и приема сигналов, псевдослучайный сигнал, преднамеренная помеха, рандомизированное правило приема, гарантированная вероятность ошибки

**DOI:** 10.31857/S0555292325010048, **EDN:** EAGPSL

**§ 1. Введение**

Статья продолжает исследования методов анализа и оптимизации параметров и режима обработки псевдослучайных сигналов (ПСС) в системе передачи информации (СПИ), функционирующей в условиях воздействия преднамеренных помех, структура которых может подбираться с позиции нарушения (ухудшения) работы системы [1–13].

Общая постановка и пути решения проблемы передачи информации по каналам с неполно заданными характеристиками рассматривались в [1–3]. В [1–22] для различных ограничений на сообщения и сигналы данные вопросы в теоретико-игровой постановке изучались применительно к неполному описанию действующей в канале помехи.

Исследуется частный случай задачи [2] синтеза алгоритма формирования и приема сигналов (АФПС) для стационарного канала связи с аддитивной помехой, что обеспечивает применимость результатов статьи для каналов радиосвязи прямой видимости, в частности, спутниковых, радиорелейных или организованных на базе летно-подъемных средств. Алгоритм формирования сигналов (АФС) заранее определен и представлен равномерным распределением эталонного сигнала на единичной сфере в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ , где  $n$  – база ПСС. Такой алгоритм интерпретируется и реализуется как формирователь (модулятор) амплитудно-фазомодулированных ПСС, которые при  $n = 1$  представляют собой обычные фазомодулированные сигналы.

При заданном АФС задача синтеза, как и в [4–11, 14], направляется на поиск эффективного алгоритма приема сигналов (АПС), формально представляемого стохастическим (псевдослучайным) оператором, формирующим рандомизированное ре-

шение относительно переданного сигнала. В качестве класса АПС определено множество решающих функций приемника с так называемым  $\Delta$ -слоем неразличимости (сокращенно –  $\Delta$ -слоем), т.е. областью в  $\mathbb{R}^n$ , расположенной между двумя параллельными гиперплоскостями, разнесенными на расстояние  $2\Delta$ , при попадании в которую поступившего из канала сигнала приемник выдает получателю сообщения  $\pm 1$  с одинаковой вероятностью.

Установлено, что в классе помех с ограниченной средней мощностью решающее правило приемника с оптимизированным  $\Delta$ -слоем при  $n = 1$  (для ФМ-сигналов) и  $n = 2$  (АФМ-сигналов) обеспечивает повышение гарантированной помехоустойчивости приема по отношению к приемнику Котельникова и, таким образом, представляет еще один пример (см. также [3, §4]) решающего правила приемника, эффективного в условиях преднамеренных помех. Так, энергетический выигрыш АПС с  $\Delta$ -слоем для радиолинии с ФМ-сигналами составляет приблизительно 1,38 дБ, а с АФМ-сигналами при  $n = 2$  – около 0,41 дБ. При  $n \geq 3$  АПС с  $\Delta$ -слоем ( $\Delta > 0$ ) оказывается неэффективным. Вместе с тем величина выигрыша, обеспечиваемого при  $n = 1, 2$ , переносится на ПСС с любым значением базы при ее простом расширении (утверждение 5 из [3]), реализуемом, в частности, алгоритмом с псевдослучайным переключением каналов (рабочих частот, временных интервалов...). Более детально результаты статьи представлены в [23].

Дальнейшее изложение построено следующим образом. В § 2 формулируется задача оптимизации АПС с  $\Delta$ -слоем. В § 3 приводятся предварительные сведения, необходимые для описания методики решения задачи. В § 4 содержатся общие результаты и выводы. В § 5 обсуждаются условия использования результатов и некоторые нерешенные вопросы.

## § 2. Постановка задачи

Используются следующие обозначения:  $\mathbb{N}$  – множество натуральных чисел, элементы (векторы) евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , обозначаются рукописными строчными буквами с обычным (нежирным) шрифтом. Для нормы и скалярного произведения в  $\mathbb{R}^n$  используются знаки  $\|\cdot\|$ ,  $[\cdot, \cdot]$  соответственно, символ  $\mathbf{I}(\cdot)$  обозначает индикаторную функцию события (выполнения условия), принимающую значения в  $\{0, 1\}$ , символ  $\mathbb{O}^n$  используется для обозначения единичной центрированной сферы в  $\mathbb{R}^n$ , а  $\mathbb{O}_*^n$  – соответствующего шара, вектор  $\mathbf{1} \in \mathbb{O}^n$  будем считать фиксированным. Случайные векторы (СВ) обозначаются рукописными прописными буквами типа  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \dots$ , выборочные множества для СВ и их элементы – соответственно прописными и строчными латинскими буквами, совпадающими с используемыми для этих величин:  $\mathcal{Z}$  – множество реализаций СВ  $\mathcal{Z}$ , а  $z \in \mathcal{Z}$  – возможная реализация. В качестве закрепленных символов используются  $\mathcal{A}, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{B}$ , обозначающие, соответственно: сообщение источника, эталонный сигнал, помеху, сигнал на выходе канала (выходе приемника), выдаваемое получателю сообщение, а также символы  $\varkappa, \varkappa_*$ , обозначающие, соответственно, СВ с равномерным распределением на  $\mathbb{O}^n, \mathbb{O}_*^n$ .

Функция распределения вероятностей (ФРВ) СВ  $\mathcal{Z}$  записывается в виде  $F_{\mathcal{Z}}(\cdot)$ , символом  $\mathbf{E}[\mathcal{Z}]$  обозначается математическое ожидание СВ  $\mathcal{Z}$ , которое при необходимости конкретизации ФРВ может быть представлено в виде  $\mathbf{E}_{F_{\mathcal{Z}}}[\mathcal{Z}]$ .

Функции, в набор аргументов которых входят случайные величины, записываются с окружением аргументов квадратными скобками и определяются усреднением по распределениям всех случайных аргументов, т.е.  $\varphi[\dots, \mathcal{Z}, \dots] = \mathbf{E}[\varphi(\dots, \mathcal{Z}, \dots)]$ .

СПИ представляет собой линию связи, состоящую из последовательно соединенных модулятора ПСС, канала связи и приемника (демодулятора), конструкции объектов соответствуют оговоренным выше условиям, а также результатам работ [2, 3].

Работа модулятора и приемника основана на формировании (или использовании заранее сформированного) передатчиком и приемником эталонного ПСС  $\mathcal{U} \sim \varkappa$

с идентичными реализациями  $u \in \mathbb{O}^n$ . По сообщению источника  $\mathcal{A}$  и эталонному сигналу  $\mathcal{U}$  передатчик формирует и посылает в канал связи модулированный сигнал  $\mathcal{U}_A = \mathcal{A}\mathcal{U}$ , с выхода которого на вход приемника поступает сигнал  $\mathcal{W} = \mathcal{U}_A + \mathcal{V}$ , где  $\mathcal{V}$  – преднамеренная помеха, ключевое отличие которой от случайной состоит в том, что ее стратегия (распределение  $F_{\mathcal{V}}(v)$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$ ) подбирается ИП наилучшим образом для уже разработанной СПИ. При этом класс допустимых вариантов (стратегий) постановки помехи определен ограничением на ее среднюю мощность  $\delta$ , приходящуюся на передаваемый в СПИ сигнал, т.е. неравенством  $\mathbf{E}[\|\mathcal{V}\|^2] \leq \delta$ .

АПС рассматривается как семейство случайных величин  $\mathcal{B}(w, u)$  с реализациями из  $\{-1, 1\}$ , параметризованное элементами из  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{O}^n$ , первая компонента которого соответствует поступившей из канала реализации  $w = au + v$ , а вторая – реализации эталонного сигнала  $u$ , и задается условной вероятностью

$$P_{\mathcal{B}}(w, u) = \Pr\{\mathcal{B} = 1 | w, u\}.$$

Под АФПС  $\mathcal{X}$  подразумевается пара  $\mathcal{X} = \langle \mathcal{U}, \mathcal{B} \rangle$ .

*Замечание 1.* При  $n = 1$  рандомизация передаваемого в канал сигнала реализуется в алфавите источника  $\mathcal{A}$ , т.е. фактически АФС функцией  $\mathcal{U}_A = \mathcal{A}\mathcal{U}$  осуществляет  $\{-1, 1\}$ -гаммирование направляемых в канал сообщений, а АПС  $\mathcal{B}$  – обратное преобразование зарегистрированных данных. Учитывая, что такое гаммирование не влияет на помехоустойчивость передачи информации, оно может быть исключено, и можно принять  $\mathcal{U} = 1$ .

Для АПС с  $\Delta$ -слоем (АПС  $\mathcal{B}_{\Delta}$ ) функция  $P_{\mathcal{B}_{\Delta}}(w, u)$  представляется соотношением

$$P_{\mathcal{B}_{\Delta}}(w, u) = \frac{1}{2}(1 + \text{sgn}_{\Delta}([w, u])),$$

где

$$\text{sgn}_{\Delta}(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } |z| < \Delta, \\ \text{sgn}(z) & \text{при } |z| \geq \Delta. \end{cases}$$

При  $\Delta = 0$  АПС  $\mathcal{B}_{\Delta}$  вырождается в нерандомизированный (почти всюду) АПС  $\mathcal{B}_0$ , совпадающий с приемником Котельникова.

*Предложение 1.* При  $n = 1$  имеет место равенство

$$P_{\mathcal{B}_{\Delta}}[w, u] = P_{\mathcal{B}_0}[w + \Delta\kappa_*, u].$$

Из предложения 1 следует, что АПС с  $\Delta$ -слоем эквивалентен АПС Котельникова с добавленным на вход шумом  $\Delta\kappa_*$ .

При имеющихся СВ  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  вероятность ошибочного приема сообщения АПС  $\mathcal{B}$  в общем случае составит величину [2, 3, 5]

$$p[\mathcal{U}, \mathcal{V} | \mathcal{B}] = \mathbf{E}[\mathbf{I}(\mathcal{B} \neq \mathcal{A})] = (1 + P_{\mathcal{B}}[-\mathcal{U} + \mathcal{V}, \mathcal{U}] - P_{\mathcal{B}}[\mathcal{U} + \mathcal{V}, \mathcal{U}])/2,$$

которую для АПС  $\mathcal{B}_{\Delta}$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} P[\mathcal{D}, n, \Delta] &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left( \mathbf{E}[\text{sgn}_{\Delta}(\xi_n \sqrt{\mathcal{D}} - 1)] - \mathbf{E}[\text{sgn}_{\Delta}(\xi_n \sqrt{\mathcal{D}} + 1)] \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \mathbf{E}[\text{sgn}_{\Delta}(\xi_n \sqrt{\mathcal{D}} - 1)] \right), \end{aligned}$$

где  $\mathcal{D} = \|\mathcal{V}\|^2$ ,  $\xi_n = [\kappa, \mathbf{1}]$ .

Как видно, с позиции воздействия на СПИ стратегия источника помехи (ИП) определяется лишь функцией  $F_{\mathcal{D}}$ , распределяющей между сигналами имеющуюся среднюю мощность  $\delta$ . Поэтому максимальная вероятность ошибочной передачи

сообщения в СПИ, т.е. гарантированная (сверху) вероятность ошибки на бит в классе помех с ограниченной средней мощностью, определяется усреднением величины  $P[\mathcal{D}, n, \Delta]$  по наихудшему допустимому распределению  $F_{\mathcal{D}}$ :

$$P^-(\delta, n, \Delta) = \sup_{F_{\mathcal{D}} \in \mathbb{F}(\delta)} P[\mathcal{D}, n, \Delta], \quad (1)$$

где  $\mathbb{F}(\delta)$  – множество ФРВ  $F_{\mathcal{Z}}$ , для которых  $\mathbf{E}_{F_{\mathcal{Z}}}[\mathcal{Z}] \leq \delta$ . Полученное выражение для показателя  $P^-(\delta, n, \Delta)$  позволяет сформулировать следующую оптимизационную задачу:

$$P^-(\delta, n, \Delta) \rightarrow \min_{\Delta}, \quad (2)$$

решение которой определяет оптимальное значение порога неразличимости

$$\Delta^*(\delta, n) = \arg \min_{\Delta} P^-(\delta, n, \Delta),$$

оптимальную стратегию постановки помехи, представленную ФРВ

$$F_{\mathcal{D}}^* = \arg \max_{F_{\mathcal{D}} \in \mathbb{F}(\delta)} P[\mathcal{D}, n, \Delta],$$

а также минимально достижимое значение вероятности ошибочного приема двоичного сообщения, гарантированное рассматриваемой СПИ  $P^-[ \mathcal{D}, n, \Delta^* ]$ .

### § 3. Предварительные сведения

**3.1. Семейство ФРВ, индуцированных равномерным распределением СВ на сфере.** Вычисление вероятностей  $P[\mathcal{D}, n, \Delta]$  основывается на формулах для площади поверхности и объема сегмента в  $\mathbb{R}^n$ , которые получены в [3]. Площадь (мера Лебега) сферического сегмента

$$\mathbb{O}^n(\alpha) = \{z \in \mathbb{O}^n \mid [z, \mathbf{1}] \leq \alpha\}$$

обозначается символом  $|\mathbb{O}^n(\alpha)|$ . Отношение  $|\mathbb{O}^n(\alpha)|/|\mathbb{O}^n(1)|$  может интерпретироваться как вероятность попадания СВ  $\varkappa$  в  $\mathbb{O}^n(\alpha)$ , т.е.

$$\Pr\{\varkappa \in \mathbb{O}^n(\alpha)\} = \Pr\{[\varkappa, \mathbf{1}] \leq \alpha\} = \Pr\{\xi_n \leq \alpha\} = |\mathbb{O}^n(\alpha)|/|\mathbb{O}^n(1)|.$$

Аналогично объем (мера Лебега) шарового сегмента

$$\mathbb{O}_*^n(\alpha) = \{z \in \mathbb{O}_*^n \mid [z, \mathbf{1}] \leq \alpha\}$$

обозначается символом  $|\mathbb{O}_*^n(\alpha)|$ . Отношение  $|\mathbb{O}_*^n(\alpha)|/|\mathbb{O}_*^n(1)|$  может интерпретироваться как вероятность попадания СВ  $\varkappa_*$  в  $\mathbb{O}_*^n(\alpha)$ , т.е.

$$\Pr\{\varkappa_* \in \mathbb{O}_*^n(\alpha)\} = \Pr\{[\varkappa_*, \mathbf{1}] \leq \alpha\} = |\mathbb{O}_*^n(\alpha)|/|\mathbb{O}_*^n(1)|.$$

В [3] (см. также [23, 24]) введено семейство ФРВ  $\mathcal{F}_n(\alpha)$ ,  $\alpha \in [-1, 1]$ , соотношениями

$$\mathcal{F}_n(\alpha) = h_n(\alpha)/h_n(1), \quad (3)$$

где  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$h_n(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha} (1-t^2)^{(n-3)/2} dt. \quad (4)$$

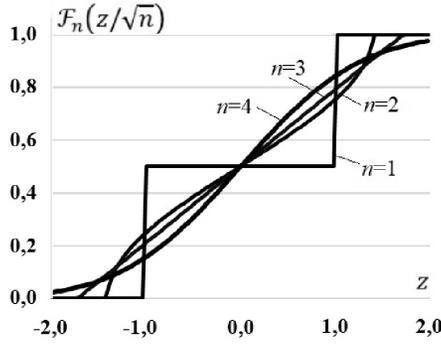


Рис. 1. Графики зависимостей  $\mathcal{F}_n(z/\sqrt{n})$

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\Pr\{z \in \mathbb{O}^n(\alpha)\} = \mathcal{F}_n(\alpha).$$

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$\Pr\{z_* \in \mathbb{O}_*^n(\alpha)\} = \mathcal{F}_{n+2}(\alpha).$$

Доказательства теорем 1, 2 приведены в [3].

Предложение 2. *При  $n \geq 3$  функция  $\mathcal{F}_n(\alpha)$  вогнута (выпукла сверху) по  $\alpha \in [0, \infty)$ .*

Для значений  $n \leq 5$  в [25] приведены аналитические выражения, представляющие ФРВ  $\mathcal{F}_n(\cdot)$  на отрезке  $[-1, 1]$ , а также общая формула для нечетных  $n$ , полученная на основе бинома Ньютона для подынтегрального выражения в (4).

Методы вычисления площадей сферических и объемов шаровых сегментов рассматривались также в [26].

Теорема 3. *При  $z/\sqrt{n} = \text{const}$ ,  $n \rightarrow \infty$  имеет место сходимость*

$$\mathcal{F}_n(z/\sqrt{n}) \rightarrow \mathcal{F}(z),$$

где  $\mathcal{F}(\cdot)$  – интеграл вероятностей Гаусса.

Утверждение теоремы анонсировано в [2, с. 63], доказательство приведено в [23].

На рис. 1 приведены графики зависимостей  $\mathcal{F}_n(z/\sqrt{n})$  для  $n = 1 - 4$ ; при  $n \geq 4$  кривые, отображающие функции  $\mathcal{F}_n(z/\sqrt{n})$ , на рисунке неразличимы и неотличимы от кривой для  $\mathcal{F}(z)$ .

### 3.2. Методика оптимизации $P[\mathcal{D}, n, \Delta]$ по $F_{\mathcal{D}} \in \mathbb{F}(\delta)$ и вычисления $P^-(\delta, n, \Delta)$ .

Решение задачи (2) предполагает нахождение максимального значения функционала  $P[\mathcal{D}, n, \Delta]$  в (1), представляющего момент  $P[\cdot]$  по распределению  $F_{\mathcal{D}}$ , в качестве внутренней задачи. В соответствии с теоремой Каратеодори [27, с. 31] максимальное значение функционала  $P[\mathcal{D}, n, \Delta]$  достигается на выпуклой сверху оболочке функции  $P(d, n, \Delta)$  по аргументу  $d$ , а по теореме Рисса [27, с. 30] эта оболочка реализуется двухатомным (двухточечным) распределением из  $\mathbb{F}(\delta)$ .

*Замечание 2.* Одноатомные распределения рассматриваются как частный случай двухатомных.

Пусть  $P^\wedge(d, n, \Delta)$  обозначает вогнутую (выпуклую сверху) оболочку функции  $P(d, n, \Delta)$  по первому аргументу. Из рассмотренного вытекает следующее утвер-

Значения параметров  $k^-(n)$ ,  $\delta'(n)$ 

$n$	1	2	3	4	5	10	20	50	$\infty$
$k^-(n)$	0,250	0,238	0,222	0,205	0,196	0,180	0,173	0,168	0,166
$\delta'(n)$	1	0,953	0,750	0,734	0,727	0,714	0,710	0,707	0,706

ждение, на основе которого в [2, 13, 18, 24, 28] решались задачи оптимизации функционалов при ограничении на среднее значение варьируемого параметра.

Теорема 4. *Справедливо равенство*

$$P^-(\delta, n, \Delta) = P^{\wedge}(\delta, n, \Delta).$$

Таким образом, для получения гарантированной вероятности ошибки АПС  $\mathcal{B}_{\Delta}$  достаточно построить выпуклую вверх оболочку  $P^{\wedge}(\delta, n, \Delta)$ , т.е. определить точки сосредоточения СВ  $\mathcal{D}$ . С учетом двухатомности оптимального распределения  $F_{\mathcal{D}}^*$  задача (1) в общем случае сводится к задаче двухпараметрической оптимизации

$$P^{\wedge}(\delta, n, \Delta) = \max_{\delta'', \delta'} [(1-p)P(\delta'', n, \Delta) + pP(\delta', n, \Delta)], \quad (5)$$

где  $\delta'' \leq \delta \leq \delta'$ , а параметр  $p$  определен условием

$$(1-p)\delta'' + p\delta' = \delta, \quad p \in [0, 1].$$

В результате решения также определяется оптимальная стратегия источника помехи (наихудшая для СПИ), представленная двухатомной ФРВ

$$F_{\mathcal{D}}^*(d) = \mathbf{I}(d \geq \delta'')(1 - \delta/\delta') + \mathbf{I}(d \geq \delta')\delta/\delta'. \quad (6)$$

В соответствии с ФРВ  $F_{\mathcal{D}}^*(d)$  ИП выделяет на передаваемый сигнал энергию  $\delta'$  с вероятностью  $p$  и  $\delta''$  с вероятностью  $1-p$ , где  $(\delta'', \delta')$  – пара, составляющая оптимальную точку в задаче (5). Для “типичной” зависимости  $P(\delta', n, \Delta)$  (см. [23]) имеет место  $\delta'' = 0$ , при этом задача (5) становится однопараметрической, в результате ее решения устанавливается оптимальность импульсной стратегии помехи с мощностью импульса  $\delta'$  и его вероятностью  $p$ .

**3.3. Актуальные верхние границы гарантированной вероятности ошибки.** Из рассмотренного понятно, что для всех алгоритмов передачи сообщений  $\mathcal{X}$  функция  $P^-(\delta, n | \mathcal{X})$ , определяющая гарантированную СПИ вероятность ошибочного приема сообщения, выпукла вверх, при этом оценки величины  $P^-(\delta, n | \mathcal{X})$  для эффективных АФПС оказались на начальном отрезке  $\delta \in [0, \delta'(n)]$  линейными по  $\delta$ , а при  $n \rightarrow \infty$  линейными по  $\delta/n$ .

В табл. 1 для различных значений  $n$  приведены актуальные на текущий момент верхние границы  $P^-(\delta, n | \mathcal{X})$  на интервалах  $[0, \delta'(n)]$ , определенные линейными зависимостями:  $P^-(\delta, n | \mathcal{X}) = k^-(n)\delta/n$  для проверенных АФПС  $\mathcal{X}$ .

Значения  $k^-(n)$ ,  $\delta'(n)$  для  $n = 1$  получены в [5], для  $n = 2$  – на основе теоремы 7 настоящей статьи, для  $n \geq 3$  взяты из табл. 1 в [2], где построены в виде вогнутых оболочек функций  $P(d, n, 0)/n$ .

Под простым  $m$ -расширением АФПС  $\mathcal{X}^n$  в  $\mathbb{R}^n$  в [2] (см. предложение 7) понимается АФПС  $\mathcal{X}^{mn}$  в  $\mathbb{R}^{mn}$ , который на каждом шаге равновероятно выбирает  $n$  компонент из  $mn$  и в соответствующем выбранном пространстве  $\mathbb{R}^n$  использует АФПС  $\mathcal{X}^n$ . Примерами простых  $m$ -расширений АФПС могут служить алгоритмы обработки сигналов с псевдослучайным переключением рабочих частот, каналов, временных интервалов и пр. [12, 17–19].

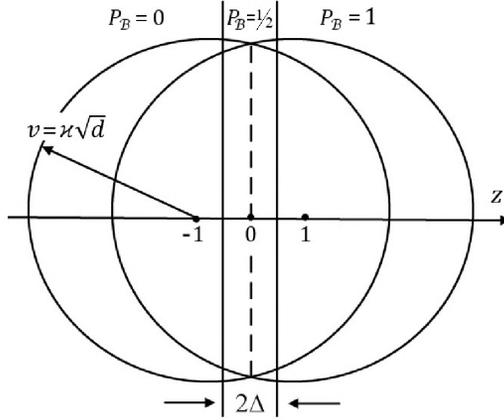


Рис. 2. Иллюстрация принципа вычисления зависимости  $P(d, n | \Delta)$

Обозначим

$$P^-(\delta, n | \mathcal{X}^n) = \sup_{F_{\mathcal{D}} \in \mathbb{F}(\delta)} P[\mathcal{D}, n | \mathcal{X}^n].$$

Теорема 5 (см. [2, предложение 5]). Пусть  $\mathcal{X}^{mn}$  – простое  $m$ -расширение АФПС  $\mathcal{X}^n$ , и пусть для АФПС  $\mathcal{X}^n$  в  $\mathbb{R}^n$  выполняется равенство

$$P^-(\delta, n | \mathcal{X}^n) = k^- \delta / n \quad \text{при} \quad \delta / n \in [0, \delta'].$$

Тогда для АФПС  $\mathcal{X}^{mn}$  выполняется равенство

$$P^-(m\delta, mn | \mathcal{X}^{mn}) = k^- \delta / mn \quad \text{при} \quad \delta / mn \in [0, \delta'].$$

Доказательство этого утверждения приведено в [23].

#### § 4. Основные результаты

В этом параграфе дается решение задачи (2): определяются оптимальные значения параметров  $\Delta_n^*$ -слоя, показателя гарантированной АПС  $\mathcal{B}_{\Delta}$  вероятности ошибки, а также параметров распределения  $F_{\mathcal{D}}$ , характеризующих наилучшую для СПИ стратегию ИП.

**4.1. Общие соотношения для  $P(d, n, \Delta)$ .** Принцип вычисления зависимости  $P(d, n, \Delta)$  поясняется на рис. 2, где использовано представление

$$P(d, n, \Delta) = \frac{1}{2} [1 + \text{sgn}_{\Delta}(\xi_n \sqrt{d} - 1)] = \frac{1}{2} [\text{sgn}_{\Delta}([\kappa \sqrt{d}, 1] - 1)], \quad (7)$$

причем

$$\text{sgn}_{\Delta}(\xi_n \sqrt{d} - 1) = \begin{cases} -1, & \text{если } d\xi_n^2 < d_1, \\ 0, & \text{если } d_1 \leq d\xi_n^2 < d_2, \\ 1, & \text{если } d_2 \leq d\xi_n^2, \end{cases} \quad (8)$$

где  $d_1 = (1 - \Delta)^2$ ,  $d_2 = (1 + \Delta)^2$ .

Из (7), (8) с учетом теоремы 1 получаем следующее представление функции  $P(d, n, \Delta)$ .

Предложение 3. Справедливо равенство

$$P(d, n, \Delta) = 1 - \left( \mathcal{F}_n(\sqrt{d_1/d}) + \mathcal{F}_n(\sqrt{d_2/d}) \right) / 2. \quad (9)$$

На основе представления (9) несложные вычислительные приемы позволяют найти решение исходной задачи (2). Вместе с тем далее показано, что АПС  $\mathcal{B}_\Delta$  с  $\Delta > 0$  эффективен лишь для случаев  $n = 1$  и  $n = 2$ , которые имеются возможность рассмотреть более детально.

Предварительно заметим, что  $0 \leq d_1/d \leq d_2/d$  и при  $d < d_1$  имеет место равенство  $P(d, n, \Delta) = 0$ , поэтому рассматриваются две ситуации:

- 1)  $d_1 \leq d < d_2 \Rightarrow P_1(d, n, \Delta) = \frac{1}{2}(1 - \mathcal{F}_n(\sqrt{d_1/d}))$ ,
- 2)  $d_2 \leq d \Rightarrow P_2(d, n, \Delta) = 1 - \frac{1}{2}(\mathcal{F}_n(\sqrt{d_1/d}) + \mathcal{F}_n(\sqrt{d_2/d}))$

с соответствующими параметрами:

$$k_i(n, \Delta) = \max_{d \in D_i} \frac{n}{d} P(d, n, \Delta), \quad \delta'_i(n) = \arg \max_{d \in D_i} k_i(d, n, \Delta), \quad (10)$$

где  $i \in \{1, 2\}$ ,  $D_1 = [d_1, d_2]$ ,  $D_2 = [d_2, \infty)$ , причем

$$k(n, \Delta) = \max\{k_1(n, \Delta), k_2(n, \Delta)\}.$$

С учетом того, что величины  $P_1(\cdot)$ ,  $k_1(\cdot)$  возрастают, а  $P_2(\cdot)$ ,  $k_2(\cdot)$  убывают с ростом  $\Delta$ , оптимальное (для начального участка значений  $\delta$ ) значение  $\Delta_n^*$  находится из уравнения  $k_1(n, \Delta_n^*) = k_2(n, \Delta_n^*)$ , которое в рассматриваемых случаях имеет решение (показано в пп. 4.2, 4.3).

Результат проведенных рассуждений представим утверждениями следующих двух теорем, в которых численные значения используемых величин (составляющих решение исходной задачи) определяются в пп. 4.2, 4.3.

**Теорема 6.** Для  $n = 1$  и  $n = 2$  при  $\delta \in [0, \delta'_1(n)]$ :

- 1) оптимальное значение параметра  $\Delta$ -слоя равно  $\Delta_n^*$ ;
- 2)  $P^*(\delta, n) = P^\wedge(\delta, n, \Delta_n^*)$ .

**Теорема 7.** Для АПС с  $\Delta_n^*$ -слоем:

- 1) гарантированное верхнее значение вероятности ошибки равно

$$P^-(\delta, n, \Delta_n^*) = \begin{cases} k^-(n)\delta/n, & \text{если } \delta < \delta'_2(n), \\ P(\delta, n, \Delta_n^*), & \text{если } \delta'_2(n) \leq \delta; \end{cases}$$

- 2) оптимальная помеха действует:

- при  $\delta < \delta'_2(n)$  в импульсном режиме с мощностью импульса  $\delta'_2(n)$  и его вероятностью  $p = \delta/\delta'_2(n)$ ;
- при  $\delta \geq \delta'_2(n)$  с постоянной мощностью  $\delta$ ;

- 3) при  $\delta < \delta'_1(n)$  возможен вариант оптимальной импульсной помехи с мощностью импульса  $\delta'_1(n)$  и вероятностью его формирования  $p = \delta/\delta'_1(n)$ .

**4.2. Параметры АПС и ИП при  $n = 1$ .** Для  $-1 \leq \alpha < 1$  имеет место следующее:

$$\mathcal{F}_1(\alpha) = 1/2,$$

$$k_1(1, \Delta) = \frac{1}{4d_1} = \frac{1}{4(1 - \Delta)^2}, \quad \delta'_1(1) = d_1,$$

$$k_2(1, \Delta) = \frac{1}{2d_2} = \frac{1}{2(1 + \Delta)^2}, \quad \delta'_2(1) = d_2.$$

Из условия  $k_1(1, \Delta_1^*) = k_2(1, \Delta_1^*)$  следует

$$\Delta_1^* = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,1716.$$

При этом

$$d_1 = 4(\sqrt{2} - 1)^2 \approx 0,6863, \quad d_2 = 2d_1, \\ k^-(1) = k_1(1, \Delta_1^*) = k_2(1, \Delta_1^*) = 1/4d_1 \approx 0,3643.$$

Учитывая, что для АПС Котельникова  $\Delta = 0$  и  $k_1(1, 0) = 0,5$ , можно оценить выигрыш в отношении помеха/сигнал, обеспечиваемый АПС с  $\Delta_1^*$ -слоем при  $\delta \leq \delta'_2(1)$ , величиной

$$k(1, 0)/k^-(1) \approx 1,37,$$

что соответствует приблизительно 1,38 дБ.

**4.3. Параметры АПС при  $n = 2$ .** Для  $-1 \leq \alpha < 1$  имеет место следующее:

$$F_2(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \alpha, \\ k_1(d, 2, \Delta) = \frac{1}{\pi d} \arccos \sqrt{d_1/d}, \\ \delta'_1(2) = \arg \max_{d \in [d_1, d_2]} k_1(d, 2, \Delta).$$

Положив  $\sqrt{d_1/d} = z$ , из условия  $[k_1(2, \Delta)]'_z = 0$  для значения  $z_0$ , максимизирующего величину  $k_1(d, 2, \Delta)$ , можно получить уравнение

$$2\varphi = \operatorname{ctg} \varphi, \quad \text{где } \varphi = \arccos z_0,$$

решение которого позволяет с достаточной точностью определить величины:

$$\varphi \approx 0,6533, \quad \delta'_1(2) = \cos \varphi \approx 0,7941$$

и представить  $k_1(2, \Delta)$  в виде

$$k_1(2, \Delta) = \frac{\varphi}{\pi} \left( \frac{\cos \varphi}{1 - \Delta} \right)^2 \approx \frac{0,1311}{(1 - \Delta)^2}.$$

Для  $k_2(2, \Delta)$  имеет место

$$k_2(2, \Delta) = \max_{d \in [d_2, \infty)} \frac{2}{d} P(d, 2, \Delta) = \max_{d \in [d_2, \infty)} k_2(d, 2, \Delta) = k_2(d'_2, 2, \Delta),$$

где

$$k_2(d, 2, \Delta) = \frac{1}{\pi d} \left( \arccos \sqrt{d_1/d} + \arccos \sqrt{d_2/d} \right), \\ \delta'_2(2) = \arg \max_{d \in [d_2, \infty)} k_2(d, 2, \Delta).$$

С учетом выполнения условия

$$k^-(2) = k_1(2, \Delta_2^*) = k(2, \Delta_2^*)$$

в [23] предложен алгоритм нахождения величины  $k^-(2)$ , реализация которого с использованием метода сечений для внутренней оптимизационной задачи (10) привела

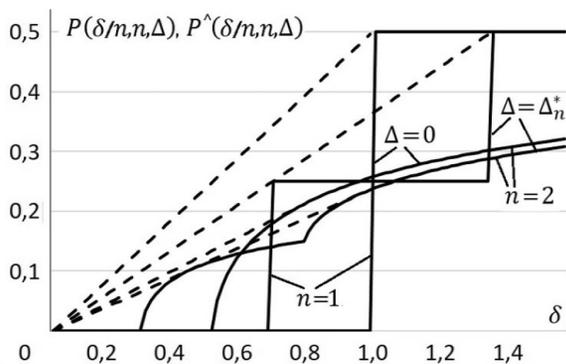


Рис. 3. Графики зависимостей  $P(\delta/n, n, \Delta)$  и их выпуклых оболочек  $P^\wedge(\delta/n, n, \Delta)$

к результату

$$\Delta_2^* \approx 0,2584, \quad \delta_1'(2) \approx 0,4361, \quad \delta_2'(2) \approx 0,9528, \quad k^-(2) \approx 0,2384.$$

Учитывая, что для приемника Котельникова имеет место

$$k(2, 0) = 2k_1(2, 0) \approx 0,2622$$

(см. также табл. 1 в [2]), можно оценить выигрыш в отношении помеха/сигнал, обеспечиваемый АПС с  $\Delta_2^*$ -слоем при  $\delta \leq \delta_1'(2)$ , величиной

$$k(2, 0)/k^-(2) \approx 1,10,$$

что соответствует приблизительно 0,41 дБ.

На рис. 3 представлены графики зависимостей  $P(\delta/n, n, \Delta)$  при  $n = 1, 2$  для  $\Delta = 0$ ,  $\Delta = \Delta_n^*$  (сплошные линии) и  $P^\wedge(\delta/n, n, \Delta)$  на отрезках  $[0, \delta']$  (пунктирные линии), иллюстрирующие принцип построения выпуклых оболочек и оценки выигрыша, обеспечиваемого АПС с  $\Delta_n^*$ -слоем.

#### 4.4. Об АПС $\mathcal{B}_\Delta$ при $n \geq 3$ . Имеет место следующая

**Теорема 8.** При  $n \geq 3$ ,  $\Delta > 0$  выполняется неравенство  $P(\delta, n, \Delta) \geq P(\delta, n, 0)$ , т.е. АПС  $\mathcal{B}_\Delta$  с  $\Delta > 0$  неэффektivен.

Это утверждение является следствием предложения 2.

## § 5. Заключение

Полученные результаты показывают возможность получения выигрыша в помехоустойчивости к преднамеренным помехам за счет несложной модификации приемных устройств радиолинии, как для узкополосных сигналов, так и радиолиниях с псевдослучайным переключением радиочастот (каналов, временных интервалов...). Следует отметить, что приведенные результаты (как и результаты работ [2–8, 10, 24, 28]) относятся к случаю синхронного (по субэлементам сигнала) и когерентного воздействия преднамеренной помехи, что, как известно [13], занижает оценки показателей помехоустойчивости СПИ. Дополнительный выигрыш в гарантированной помехоустойчивости может быть получен за счет рандомизации фазы и/или амплитуды формируемых ПСС.

Заметим, что все известные результаты, связанные с обеспечением гарантированной помехоустойчивости, относятся к СПИ с передачей двоичных сообщений.

При этом достижимые СПИ (верхние) значения вероятности ошибки проигрывают общим нижним границам этой величины (см. табл. 2 из [2]) на 6,1–7,4 дБ, что дает надежду на повышение помехоустойчивости передачи сообщений за счет использования алгоритмов передачи многопозиционных сигналов (в частности, кодирования/декодирования, использования сигнально-кодowych конструкций, алгоритмов с обратной связью).

Особенностью задачи обеспечения гарантированной помехоустойчивости для СПИ с многопозиционными сигналами является необходимость учета стратегии источника помехи, перекрывающей по длительности воздействия импульса совокупность передаваемых по каналу кодовых слов, а если в СПИ предусматривается межблочное перемежение символов, то и макроблок, в котором оно осуществляется. Такая дискриминация СПИ в конфликтном взаимодействии с ИП обусловлена практическими условиями работы некоторых систем связи с применением стратегий ИП с распределением ресурса на группы радиолиний. В сформулированной задаче допустимость таких стратегий ИП учтена в классе  $\mathbb{F}(\delta)$ .

Нужно сказать, что известные авторам попытки разработчиков систем передачи информации получить положительный результат в повышении гарантированной помехоустойчивости за счет применения многопозиционных сигналов оказались безуспешными. Дело в том, что “хорошие” (в классическом понимании) коды не повышают достоверность передачи сообщений в состоянии канала, соответствующем воздействию импульса помехи, а при ее паузе избыточность кода также оказывается бесполезной. В связи с этим более перспективным представляется поиск помехоустойчивых многопозиционных АФПС в  $\mathbb{R}^n$ , однако нужно признать, что даже просто анализ гарантированной помехоустойчивости заданного алгоритма с многопозиционными сигналами в  $\mathbb{R}^n$  составляет проблему в связи со сложностью каждой из входящих в задачу компонент.

Таким образом, к итогам настоящей статьи наряду с получением результата, улучшающего верхнюю границу гарантированной вероятности ошибки в классе помех с ограниченной средней мощностью, авторы относят также привлечение внимания специалистов к проведению исследований в этом важном и интересном направлении с непростыми задачами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добрушин Р.Л. Оптимальная передача информации по каналу с неизвестными параметрами // Радиотехника и электроника. 1959. Т. 4. № 12. С. 1951–1956.
2. Чуднов А.М. Теоретико-игровые задачи синтеза алгоритмов формирования и приема сигналов // Пробл. передачи информ. 1991. Т. 27. № 3. С. 57–65. <https://www.mathnet.ru/rus/ppi570>
3. Чуднов А.М. О минимаксных алгоритмах формирования и приема сигналов // Пробл. передачи информ. 1986. Т. 22. № 4. С. 49–54. <https://www.mathnet.ru/rus/ppi958>
4. Sahn C. Worst Interference for Coherent Binary Channel // IEEE Trans. Inform. Theory. 1971. V. 17. № 2. P. 209–210. <https://doi.org/10.1109/TIT.1971.1054597>
5. Жодзишский Ю.И. Максимальная гарантированная помехоустойчивость приема сигналов при ограничении средней мощности мешающих воздействий // Радиотехника. 1986. № 10. С. 56–57.
6. Вейцель В.А., Жодзишский М.И., Жодзишский Ю.И. Гарантированная помехоустойчивость приема сигналов // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32. № 2. С. 316–321.
7. Жодзишский М.И. Применение теории игр к синтезу оптимальной системы посимвольной передачи информации // Радиотехника. 1982. № 11. С. 77–81.
8. Sahn C. Performance of Digital Matched Filter Correlator with Unknown Interference // IEEE Trans. Commun. Techn. 1971. V. 19. № 6. P. 1163–1172. <https://doi.org/10.1109/TCOM.1971.1090760>

9. *Bashar T., Wu Y.-W.* A Complete Characterization of Minimax and Maximin Encoder-Decoder Policies for Communication Channels with Incomplete Statistical Description // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 1985. V. 31. № 4. P. 482–489. <https://doi.org/10.1109/TIT.1985.1057076>
10. *Путылин А.Н., Чуднов А.М.* Оптимизация приемника фазоманипулированных псевдослучайных сигналов при наихудшей помехе с ограниченной средней мощностью // *Радиотехника и электроника.* 1990. Т. 35. № 8. С. 1646–1650.
11. *Kullstam P.* Spread Spectrum Performance Analysis in Arbitrary Interference // *IEEE Trans. Commun.* 1977. V. 25. № 8. P. 848–853. <https://doi.org/10.1109/TCOM.1977.1093906>
12. *Чуднов А.М.* Помехозащищенность системы передачи информации с псевдослучайным переключением частот в условиях наихудших помех // *Изв. вузов. Радиоэлектроника.* 1984. Т. 27. № 9. С. 3–8.
13. *Чуднов А.М.* Помехоустойчивость корреляционного приема псевдослучайных сигналов, модулированных по амплитуде и фазе // *Радиотехника и электроника.* 1987. Т. 32. № 1. С. 62–68.
14. *Chen Y., Yuan W., Xu T.* Coding Split and Adjustment to Defend OFDM-IM Against Jamming Attacks // *IEEE Commun. Lett.* 2023. V. 27. № 2. P. 457–461. <https://doi.org/10.1109/LCOMM.2022.3224381>
15. *Nguyen B. V., Nguyen M. T., Jung H., Kim K.* Designing Anti-Jamming Receivers for NR-DCSK Systems Utilizing ICA, WPD, and VMD Methods // *IEEE Trans. Circuits Syst. II Express Briefs.* 2018. V. 66. № 9. P. 1522–1526. <https://doi.org/10.1109/TCSII.2019.2891254>
16. *Yue G., Wang X.* Anti-Jamming Coding Techniques with Application to Cognitive Radio // *IEEE Trans. Wireless Commun.* 2009. V. 8. № 12. P. 5996–6007. <https://doi.org/10.1109/TWC.2009.12.081627>
17. *Mpitzopoulos A., Gavalas D., Konstantopoulos C., Pantziou G.* A Survey on Jamming Attacks and Countermeasures in WSNs // *IEEE Commun. Surv. Tutor.* 2009. V. 11. № 4. P. 42–56. <https://doi.org/10.1109/SURV.2009.090404>
18. *Чуднов А.М.* Об адаптивных алгоритмах псевдослучайного переключения рабочих частот радиолиний в условиях случайных и преднамеренных помех // *Журнал радиоэлектроники.* 2015. № 4. С. 1–14. <http://jre.cplire.ru/jre/apr15/3/abstract.html>
19. *Одоевский С.М., Ерышев В.Г.* Адаптивно-игровой алгоритм переключения каналов передачи информации // *Сети связи и коммутация. Сб. научных трудов Военного университета связи. Вып. 11. СПб.: Тема, 2000. С. 91–98.*
20. *Zhou S., Giannakis G.B., Swami A.* Digital Multi-Carrier Spread Spectrum versus Direct Sequence Spread Spectrum for Resistance to Jamming and Multipath // *IEEE Trans. Commun.* 2002. V. 50. № 4. P. 643–655. <https://doi.org/10.1109/26.996079>
21. *Feng Z., Ren G., Chen J., Chen C., Yang X., Luo Y., Xu K.* An Anti-Jamming Hierarchical Optimization Approach in Relay Communication System via Stackelberg Game // *Appl. Sci.* 2019. V. 9. № 16. P. 3348 (14 pp.). <https://doi.org/10.3390/app9163348>
22. *Poisel R.A.* Modern Communications Jamming: Principles and Techniques. Boston: Artech House, 2011.
23. *Chudnov A.M., Sazonov V.V., Bikbulatov V.R.* Optimization of the Decisive Rule for a Receiver with a  $\Delta$ -Layer of Indistinguishability of Binary Signals in a Channel with Intentional Interference // *Probl. Inf. Transm.* 2025. V. 61. № 1. P. 41–55. <https://doi.org/10.1134/S0032946025010041>
24. *Чуднов А.М.* Математические основы моделирования, анализа и синтеза систем. СПб.: ВАС, 2021.
25. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
26. *Li S.* Concise Formulas for the Area and Volume of a Hyperspherical Cap // *Asian J. Math. Statist.* 2011. V. 4. № 1. P. 66–70. <https://doi.org/10.3923/ajms.2011.66.70>

27. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи (Идеи и проблемы П.Л. Чебышева и А.А. Маркова и их дальнейшее развитие). М.: Наука, 1973.
28. Чуднов А.М., Кирик Д.И., Ермакова Е.М. Оптимизация параметров кода и режима обработки сигналов в условиях преднамеренных помех // Труды учебных заведений связи. 2019. Т. 5. № 4. С. 79–86. <https://doi.org/10.31854/1813-324X-2019-5-4-79-86>

Чуднов Александр Михайлович  
Сазонов Виктор Викторович  
Бикбулатов Владислав Родионович  
Военная академия связи  
им. С.М. Буденного, Санкт-Петербург  
chudnow@yandex.ru  
vmktor-sazonov@yandex.ru  
vlaad.bik@icloud.com

Поступила в редакцию  
27.11.2024  
После доработки  
17.02.2025  
Принята к публикации  
30.03.2025

---

---

## OPTIMIZATION OF THE REGION OF INDISTINGUISHABILITY FOR A RECEIVER OF BINARY SIGNALS TRANSMITTED OVER A JAMMING CHANNEL

© 2025 A.M. Chudnov, V.V. Sazonov, V.R. Bikbulatov

Budyonny Military Academy of Telecommunications, St. Petersburg  
chudnow@yandex.ru, vmktor-sazonov@yandex.ru, vlaad.bik@icloud.com

For the reception of binary pseudorandom signals under the influence of intentional interference we introduce a randomized decisive rule with a region of indistinguishability of received signals. It is established that for signals with base  $n \leq 2$  the constructed rule of the receiver provides an increase in noise resistance of the information transmission system in the class of interference with limited average power as compared to the Kotelnikov receiver. The obtained value of the guaranteed error probability improves the actual upper bound for this quantity.

*Keywords:* signal generation and reception algorithm, pseudorandom signal, intentional interference, randomized reception rule, guaranteed error probability

**DOI:** 10.31857/S0555292325010048, **EDN:** EAGPSL

Received 27.11.2024  
Revised 17.02.2025  
Accepted 30.03.2025