

УДК 621.391 : 519.872.6

© 2023 г. Б.Я. Лихтциндер, А.Ю. Привалов, В.И. Моисеев

**НЕОРДИНАРНЫЕ ПУАССОНОВСКИЕ МОДЕЛИ ТРАФИКА
МУЛЬТИСЕРВИСНЫХ СЕТЕЙ**

Появление сетей передачи данных с коммутацией пакетов показало, что пуассоновские модели потоков не являются адекватными, и потребовало разработки новых моделей, основанных на непуассоновских распределениях. Статья посвящена анализу частного случая группового марковского потока – группового неординарного пуассоновского потока событий. В таком потоке выполняются свойство стационарности и отсутствия последствия, но не выполняется свойство ординарности. Рассматривается класс систем массового обслуживания с постоянным временем обслуживания. Приведены результаты аналитических расчетов параметров потока и результаты имитационного моделирования. Показано, что дисперсия очереди зависит от третьего момента размера пачки заявок во входящем групповом пуассоновском потоке.

Ключевые слова: системы массового обслуживания, групповой пуассоновский поток, групповой неординарный поток, системы с постоянным временем обслуживания.

DOI: 10.31857/S0555292323010060, **EDN:** RMRNDJ

§ 1. Групповой неординарный пуассоновский поток

В попытках адекватного описания поведения трафика в сетях с коммутацией пакетов исследовались модели потоков с распределениями Вейбулла, Эрланга, гамма-распределениями, распределениями Парето и ряд других. Описание сложных коррелированных потоков в современных телекоммуникационных сетях часто производилось с использованием “фрактальных” процессов. Сотни работ посвящены анализу “самоподобного” трафика. Однако из-за сложности моделей этого класса использование их на практике затруднительно. Недостаточная эффективность представления трафика моделями “самоподобных” процессов привела к созданию целого класса моделей потоков, управляемых цепью Маркова. Этапы развития указанных моделей хорошо представлены в обзоре [1].

Особое место среди таких потоков занимают так называемые групповые марковские потоки (ВМАР – Batch Markovian Arrival Processes) [2–7].

Одной из разновидностей ВМАР-потоков является групповой неординарный пуассоновский поток событий. В таком потоке выполняются свойство стационарности и отсутствия последствия, но не выполняется свойство ординарности. Рассмотрим пуассоновский поток независимых событий с параметром λ . Каждое событие заключается в одновременном появлении в момент t_k группы (“пачки”) из μ_k независимых случайно распределенных чисел заявок с распределением

$$P\{\mu_k = k\} = f_k.$$

Такой поток называют пуассоновским неординарным (групповым) потоком независимых событий [7]. Здесь и далее будем рассматривать класс систем массового обслуживания с постоянным временем обслуживания заявок.

Выделим некоторый интервал времени. Пусть τ – интервал времени обработки одной заявки. Разделим достаточно большой промежуток времени T , в течение которого действует поток указанных событий, на N_τ последовательных интервалов τ . Пусть $n_i(\tau)$ – число событий, произошедших в течение i -го интервала времени.

Поскольку поток событий пуассоновский, вероятности наступления на интервале ровно n событий подчиняются закону Пуассона:

$$\mathbf{P} |n_i(\tau) = n| = P_n(\lambda\tau) = \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau}.$$

Каждому из событий сопутствует появление пачки с распределением вероятностей чисел заявок f_i . Введем производящую функцию этого распределения

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k.$$

Поскольку все μ_k взаимно независимы и одинаково распределены, появлению на интервале τ распределения количества заявок $m(\tau)$ при условии, что на указанном интервале произошло n событий пуассоновского потока, соответствует производящая функция $[f(z)]^n$. Отсюда следует, что производящая функция $G_{m(\tau)}(z)$ числа заявок на интервале τ определяется соотношением

$$\begin{aligned} G_{m(\tau)}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\lambda\tau) [f(z)]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau} [f(z)]^n = \\ &= e^{-\lambda\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau f(z))^n}{n!} = e^{\lambda\tau [f(z)-1]}. \end{aligned}$$

Для факториальных моментов первых трех порядков, обозначая начальные моменты количества заявок в одной пачке через \bar{k}^r , $r = 1, 2, 3$, а начальные моменты количества заявок на интервале через $\overline{m^r}(\tau)$, $r = 1, 2, 3$, имеем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G_{m(\tau)}(z)}{\partial z} \right|_{z=1} &= \overline{m(\tau)} = \lambda\tau f'(z) e^{\lambda\tau [f(z)-1]} \Big|_{z=1} = \lambda\tau \bar{k}, \\ \left. \frac{\partial^2 G_{m(\tau)}(z)}{(\partial z)^2} \right|_{z=1} &= \overline{m^2(\tau)} - \overline{m(\tau)} = (\lambda\tau f''(z) + (\lambda\tau f'(z))^2) e^{\lambda\tau [f(z)-1]} \Big|_{z=1} = \\ &= \lambda\tau (\bar{k}^2 - \bar{k}) + (\lambda\tau \bar{k})^2, \\ \left. \frac{\partial^3 G_{m(\tau)}(z)}{(\partial z)^3} \right|_{z=1} &= \overline{m^3(\tau)} - 3\overline{m^2(\tau)} + 2\overline{m(\tau)} = \\ &= (\lambda\tau f'''(z) + 3(\lambda\tau)^2 f''(z) + (\lambda\tau f'(z))^3) e^{\lambda\tau [f(z)-1]} \Big|_{z=1} = \\ &= \lambda\tau (\bar{k}^3 - 3\bar{k}^2 + 2\bar{k}) + 3(\lambda\tau)^2 \bar{k} (\bar{k}^2 - \bar{k}) + (\lambda\tau \bar{k})^3. \end{aligned}$$

Отсюда соответствующими подстановками получаем

$$\begin{aligned} \overline{m(\tau)} &= \lambda\tau \bar{k}, \quad \overline{m^2(\tau)} = \lambda\tau \bar{k}^2 + (\lambda\tau \bar{k})^2, \\ \overline{m^3(\tau)} &= \lambda\tau \bar{k}^3 + 3(\lambda\tau)^2 \bar{k} \bar{k}^2 + (\lambda\tau \bar{k})^3. \end{aligned}$$

Для центральных моментов $m(\tau)$ отсюда получаем

$$\begin{aligned}\mu_2(m(\tau)) &= D_{m(\tau)} = \overline{m^2(\tau)} - (\overline{m(\tau)})^2 = \lambda\tau\overline{k^2}, \\ \mu_3(m(\tau)) &= \overline{m^3(\tau)} - 3\overline{m^2(\tau)}\overline{m(\tau)} + 2(\overline{m(\tau)})^3 = \lambda\tau\overline{k^3}.\end{aligned}$$

Для дальнейшего нам удобно будет выразить дисперсию и третий центральный момент $m(\tau)$ через коэффициент загрузки, т.е.

$$\begin{aligned}D_{m(\tau)} &= \lambda\tau\overline{k^2} = \lambda\tau(D_k + (\overline{k})^2) = \rho\overline{k}(1 + v_k^2), \\ \mu_3(m(\tau)) &= \lambda\tau\overline{k^3} = \lambda\tau\overline{k^3} = \rho\frac{\overline{k^3}}{\overline{k}},\end{aligned}$$

где $\rho = \lambda\tau\overline{k} = \overline{m(\tau)}$ – общий коэффициент загрузки, а $v_k^2 = \frac{D_k}{(\overline{k})^2}$ – квадрат коэффициента вариации чисел заявок в пачках. Полученные соотношения указывают на линейную зависимость дисперсии и третьего центрального момента от коэффициента загрузки ρ . В частном случае для пуассоновского потока $v_k^2 = 0$, $\overline{k} = 1$, и в результате $D_{m(\tau)} = \mu_3(m(\tau)) = \rho$.

§ 2. Интервальный метод анализа очередей

Одним из возможных направлений изучения пакетного трафика является разрабатываемый нами интервальный метод, позволяющий заменить анализ интервалов времени между соседними заявками и интервалов времени обработки заявок анализом одной случайной величины – числом заявок, поступающих в течение последовательных интервалов времени обработки каждой из заявок. Нами показано, что дисперсия и корреляционные свойства указанной случайной величины при заданной нагрузке полностью характеризуют средний размер очереди в системах массового обслуживания [8]. Для любой одноканальной системы массового обслуживания с неограниченной очередью справедливо рекуррентное соотношение, устанавливающее связь между поступающими и обработанными заявками [9]:

$$\begin{aligned}q_i(\tau) &= q_{i-1}(\tau) + m_i(\tau) - \delta_i(\tau), \\ \delta_i(\tau) &= \begin{cases} 0, & \text{если } q_{i-1}(\tau) = m_i(\tau) = 0, \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}\end{aligned}\quad (1)$$

где $m_i(\tau)$ и $q_i(\tau)$ – число заявок, поступивших в течение i -го интервала τ и размер очереди, образовавшейся на указанном интервале, соответственно.

Обратим внимание на некоторые особенности величин $\delta_i(\tau)$:

$$\delta_i^2(\tau) = \delta_i(\tau), \quad \delta_i(\tau)m_i(\tau) = m_i(\tau), \quad \overline{\delta_i(\tau)} = \overline{m(\tau)}, \quad \delta_i(\tau)q_{i-1}(\tau) = q_{i-1}(\tau).$$

Предпоследнее равенство легко получить, найдя математическое ожидание левой и правой частей уравнения (1) в стационарном состоянии системы. Возведем в квадрат левую и правую части (1) и найдем математические ожидания полученных выражений.

После некоторых преобразований получаем

$$\overline{q(\tau)} = \frac{D_{m(\tau)} + 2\overline{q_{i-1}(\tau)}[\overline{m_i(\tau)} - \overline{m(\tau)}]}{2[1 - \overline{m(\tau)}]} - \frac{\overline{m(\tau)}}{2}.$$

Обозначим через

$$\text{Cov}_{q_{i-1}m_i}(\tau) = \overline{[q_{i-1}(\tau) - \overline{q(\tau)}][m_i(\tau) - \overline{m(\tau)}]} = \overline{q_{i-1}(\tau)[m_i(\tau) - \overline{m(\tau)}]}$$

второй взаимный центральный момент указанных последовательностей, называемый ковариацией. Он определяется как математическое ожидание произведений центрированных значений элементов $q_{i-1}(\tau)$ и $m_i(\tau)$. Учитывая, что $\overline{m(\tau)} = \rho$, окончательно получаем

$$\overline{q(\rho)} = \frac{D_m(\rho) + 2 \text{Cov}_{q_{i-1}m_i}(\rho)}{2(1-\rho)} - \frac{\rho}{2}. \quad (2)$$

Соотношение (2) носит фундаментальный характер, обобщает формулу Хинчина – Поллачека и справедливо для любых стационарных потоков заявок при постоянном времени обслуживания. Дисперсионная и ковариационная составляющие для потоков трафика определенного типа могут быть получены экспериментально и использованы при инженерных расчетах.

Для рассмотренных нами групповых пуассоновских потоков ковариационная составляющая тождественно равна нулю:

$$\text{Cov}_{q_{i-1}m_i}(\rho) = 0, \quad D_m(\rho) = \rho E_m, \quad \text{где } E_m = \bar{k}(1 + v_k^2).$$

При этом формула (2) упрощается:

$$\overline{q(\rho)} = \frac{D_m(\rho)}{2(1-\rho)} - \frac{\rho}{2} = \frac{\rho E_m}{2(1-\rho)} - \frac{\rho}{2}. \quad (3)$$

Дисперсия $D_m(\rho)$ в формуле линейно зависит от коэффициента загрузки ρ , а ее значение пропорционально среднему числу заявок в пачке.

Получим интервальным методом выражения для второго начального момента и дисперсии очереди в одноканальной СМО с групповым пуассоновским потоком на входе. Для нахождения начального момента возведем обе части уравнения (1) в третью степень (для краткости опускаем аргумент τ):

$$q_i^3 = q_{i-1}^3 + 3q_{i-1}^2(m_i - \delta_i)^2 + (m_i - \delta_i)^3.$$

После аналогичных предыдущему случаю преобразований с учетом особенностей величин δ_i получаем

$$q_i^3 = q_{i-1}^3 + 3q_{i-1}^2 m_i - 3q_{i-1}^2 + 3q_{i-1}(m_i^2 - 2m_i + 1) + (m_i^3 - 3m_i^2 + 3m_i - \delta_i).$$

После усреднения и учета стационарного состояния системы получаем

$$3\overline{q_{i-1}^2}(1 - \overline{m_i}) = 3\overline{q_{i-1}}(\overline{m_i^2} - 2\overline{m_i} + 1) + (\overline{m_i^3} - 3\overline{m_i^2} + 2\overline{m_i}).$$

И далее, используя дисперсию m_i :

$$3\overline{q_{i-1}^2}(1 - \overline{m_i}) = 3\overline{q_{i-1}}D_m + 3\overline{q_{i-1}}(\overline{m_i} - 1)^2 + (\overline{m_i^3} - 3\overline{m_i^2} + 2\overline{m_i}).$$

Далее, для второго начального момента получаем

$$\overline{q_{i-1}^2} = \frac{\overline{q_{i-1}}D_m}{(1 - \overline{m_i})} + \overline{q_{i-1}} \cdot (1 - \overline{m_i}) + \frac{\overline{m_i^3} - 3\overline{m_i^2} + 2\overline{m_i}}{3(1 - \overline{m_i})},$$

$$\overline{q_{i-1}^2} = \overline{q_{i-1}} \left[\frac{D_m}{(1 - \overline{m_i})} + (1 - \overline{m_i}) \right] + \frac{\overline{m_i^3} - 3\overline{m_i^2} + 2\overline{m_i}}{3(1 - \overline{m_i})},$$

$$\overline{q_{i-1}^2} = \overline{q_{i-1}} \frac{D_m + (1 - \overline{m_i})^2}{(1 - \overline{m_i})} + \frac{\overline{m_i^3} - 3\overline{m_i^2} + 2\overline{m_i}}{3(1 - \overline{m_i})},$$

$$\overline{q_{i-1}^2} = \frac{\overline{q_{i-1}}}{(1 - \overline{m_i})} [D_m + (1 - \overline{m_i})^2] + \frac{\overline{m_i^3} - 3\overline{m_i^2} + 2\overline{m_i}}{3(1 - \overline{m_i})}.$$

Если перейти от третьего начального момента m_i к третьему центральному, то после некоторых преобразований получим

$$\overline{q_{i-1}^2} = \frac{\overline{q_{i-1}}}{(1 - \overline{m_i})} [D_m + (1 - \overline{m_i})^2] + \frac{\overline{m_i^3} - 3\overline{m_i^2}D_m - 3\overline{m_i^2} + 2\overline{m_i}}{3(1 - \overline{m_i})} + \frac{\mu_3}{3(1 - \overline{m_i})}.$$

Подставляя сюда выражение (3) для средней очереди пуассоновского потока с групповым прибытием, и учитывая, что $\overline{m(\tau)} = \rho$, получаем

$$\begin{aligned} \overline{q^2(\rho)} &= \frac{D_m(\rho) - \rho(1 - \rho)}{2(1 - \rho)^2} [D_m(\rho) + (1 - \rho)^2] + \\ &+ \frac{\rho^3 + 3\rho D_m(\rho) - 3D_m(\rho) - 3\rho^2 + 2\rho}{3(1 - \rho)} + \frac{\mu_3(\rho)}{3(1 - \rho)}. \end{aligned}$$

Таким образом, второй начальный момент размера очереди в СМО с групповыми пуассоновскими потоками определяется соотношением

$$\begin{aligned} \overline{q^2(\rho)} &= \frac{E_m(\rho) - \rho + \rho^2}{2(1 - \rho)^2} [E_m(\rho) + 1 - 2\rho + \rho^2] + \\ &+ \frac{\rho^3 + 3E_m\rho^2 - 3E_m\rho - 3\rho^2 + 2\rho}{3(1 - \rho)} + \frac{\mu_3(\rho)}{3(1 - \rho)}. \end{aligned}$$

В частном случае для простейшего пуассоновского потока имеем $E_m = 1$, $\mu_3(\rho) = \rho$, и выражение упрощается:

$$\overline{q^2(\rho)} = \frac{\rho^2}{2(1 - \rho)^2} \left(1 - \frac{1}{3}\rho + \frac{1}{3}\rho^2\right).$$

Оно показывает, что второй начальный момент очереди пуассоновского потока определяется исключительно значением коэффициента загрузки.

Для дисперсии размера очереди $\overline{D_q(\rho)} = \overline{q^2(\rho)} - \overline{q(\rho)}^2$ имеем

$$\begin{aligned} \overline{D_q(\rho)} &= \frac{D_m(\rho) - \rho(1 - \rho)}{2(1 - \rho)^2} [D_m(\rho) + (1 - \rho)^2] + \\ &+ \frac{\rho^3 + 3\rho D_m(\rho) - 3D_m(\rho) - 3\rho^2 + 2\rho}{3(1 - \rho)} + \frac{\mu_3(\rho)}{3(1 - \rho)} - \frac{[D_m(\rho) - \rho(1 - \rho)]^2}{4(1 - \rho)^2} = \\ &= \frac{D_m(\rho) - \rho(1 - \rho)}{2(1 - \rho)^2} [D_m(\rho) + (1 - \rho)^2 - \frac{D_m(\rho) - \rho(1 - \rho)}{2}] + \\ &+ \frac{\rho^3 + 3\rho D_m(\rho) - 3D_m(\rho) - 3\rho^2 + 2\rho}{3(1 - \rho)} + \frac{\mu_3(\rho)}{3(1 - \rho)} = \\ &= \frac{D_m(\rho) - \rho(1 - \rho)}{4(1 - \rho)^2} [2D_m(\rho) + 2(1 - \rho)^2 - D_m(\rho) + \rho(1 - \rho)] + \\ &+ \frac{\rho^3 + 3\rho D_m(\rho) - 3D_m(\rho) - 3\rho^2 + 2\rho}{3(1 - \rho)} + \frac{\mu_3(\rho)}{3(1 - \rho)} = \\ &= \frac{D_m(\rho) - \rho(1 - \rho)}{4(1 - \rho)^2} [D_m(\rho) + 2 - 4\rho + 2\rho^2 + \rho - \rho^2] + \\ &+ \frac{\rho^3 + 3\rho D_m(\rho) - 3D_m(\rho) - 3\rho^2 + 2\rho}{3(1 - \rho)} + \frac{\mu_3(\rho)}{3(1 - \rho)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{D_m(\rho) - \rho(1 - \rho)}{4(1 - \rho)^2} [D_m(\rho) + 2 - 3\rho + \rho^2] + \\ + \frac{\rho^3 + 3\rho D_m(\rho) - 3D_m(\rho) - 3\rho^2 + 2\rho}{3(1 - \rho)} + \frac{\mu_3(\rho)}{3(1 - \rho)}.$$

В результате

$$\overline{D_q(\rho)} = \frac{D_m(\rho) - \rho(1 - \rho)}{4(1 - \rho)^2} [D_m(\rho) + 2 - 3\rho + \rho^2] + \\ + \frac{\rho^3 + 3E_m\rho^2 - 3E_m\rho - 3\rho^2 + 2\rho}{3(1 - \rho)} + \frac{\mu_3(\rho)}{3(1 - \rho)}.$$

Учитывая, что $D_m(\rho) = \rho \frac{\overline{k^2}}{k}$, а $\mu_3(\rho) = \rho \frac{\overline{k^3}}{k}$, окончательно получаем

$$\overline{D_q(\rho)} = \frac{\rho \frac{\overline{k^2}}{k} - \rho(1 - \rho)}{4(1 - \rho)^2} \left[\rho \frac{\overline{k^2}}{k} + 2 - 3\rho + \rho^2 \right] + \\ + \frac{\rho^3 + 3\rho^2 \frac{\overline{k^2}}{k} - 3\rho \frac{\overline{k^2}}{k} - 3\rho^2 + 2\rho}{3(1 - \rho)} + \frac{\rho \frac{\overline{k^3}}{k}}{3(1 - \rho)}.$$

В частном случае для простейшего пуассоновского потока имеем $E_m = 1$, $D_m(\rho) = \mu_3(\rho) = \rho$, и выражение упрощается:

$$\overline{D_q(\rho)} = \frac{\rho^2}{2(1 - \rho)^2} \left(1 - \frac{1}{3}\rho - \frac{1}{6}\rho^2 \right).$$

Так же как и второй начальный момент, дисперсия очереди простейшего потока полностью определяется коэффициентом загрузки. Дисперсия очередей групповых пуассоновских потоков зависит от третьего центрального момента, который характеризует симметричность закона распределения размеров пачек заявок. Два различных групповых потока, имеющие одинаковые зависимости средних значений очередей от коэффициента загрузки, имеют различные дисперсии очередей, разность $\overline{\Delta D_q(\rho)}$ которых пропорциональна разности $\Delta\mu_3(\rho)$ их третьих центральных моментов:

$$\overline{\Delta D_q(\rho)} = \frac{\Delta\mu_3(\rho)}{3(1 - \rho)}.$$

§ 3. Имитационное моделирование

Для подтверждения полученных зависимостей нами были сгенерированы три групповых пуассоновских потока с различными законами распределения вероятностей чисел заявок в пачках. Все три потока имеют одинаковые выборки по 100 000 заявок. Интервальный метод не учитывает распределение моментов времени поступления заявок внутри каждого интервала времени τ . Имитационное моделирование подтверждает возможность такого допущения.

Поток № 1 имеет постоянные числа заявок в пачках $k = 10$.

Поток № 2 имеет экспоненциальное распределение чисел заявок в пачках со средним значением $\overline{k}_e = 0,5k = 5$ и коэффициентом вариации $v^2 = 1$. При моделировании число заявок формируется как округление до ближайшего целого от случайной величины, распределенной по экспоненциальному закону.

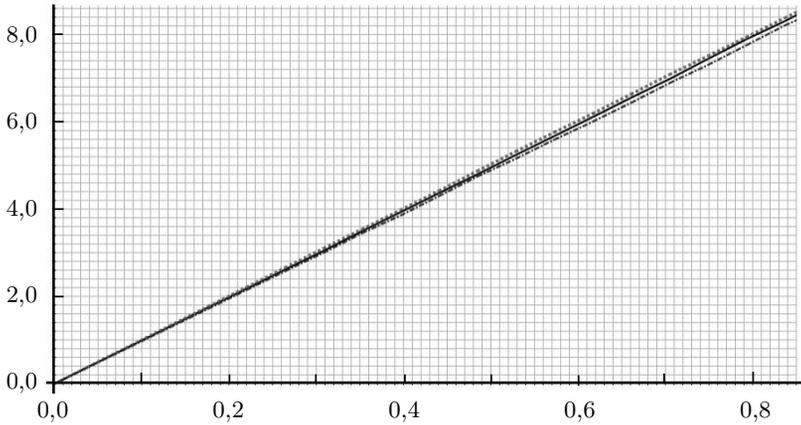


Рис. 1. Зависимости значений дисперсий для трех групповых пуассоновских потоков от коэффициента загрузки (сплошная линия – постоянное число заявок в пачках, точечная линия – пуассоновское распределение чисел заявок в пачках, пунктирная линия – экспоненциальное распределение)

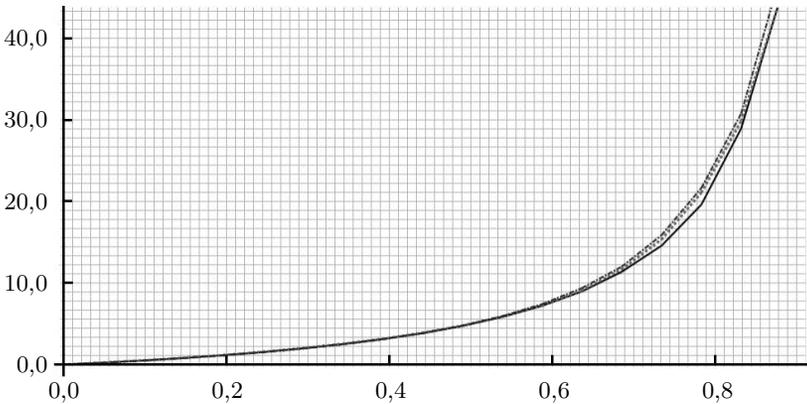


Рис. 2. Зависимости средних значений очередей для трех групповых пуассоновских потоков (сплошная линия – постоянное число заявок в пачках, точечная линия – пуассоновское распределение чисел заявок в пачках, пунктирная линия – экспоненциальное распределение)

Поток № 3 имеет пуассоновское распределение чисел заявок в пачках со средним значением $\overline{k_n} = \frac{1}{1,1}k = 9,1$ и коэффициентом вариации $v^2 = 0,1$.

В результате все три потока имеют одинаковые значения дисперсий распределений вероятностей чисел заявок в пачках: $D_m(\rho) = \bar{k}(1 + v^2)\rho = k\rho$, что подтверждается совпадением графиков, показанных на рис. 1.

В соответствии с (3) указанные потоки должны иметь одинаковые зависимости средних значений очередей от коэффициента загрузки, что подтверждается совпадением графиков, представленных на рис. 2. Учитывая постоянное время обработки заявки, среднее время задержки в очереди равно произведению среднего размера очереди на указанное время обработки, следовательно, зависимости от коэффициента загрузки будут иметь аналогичный вид.

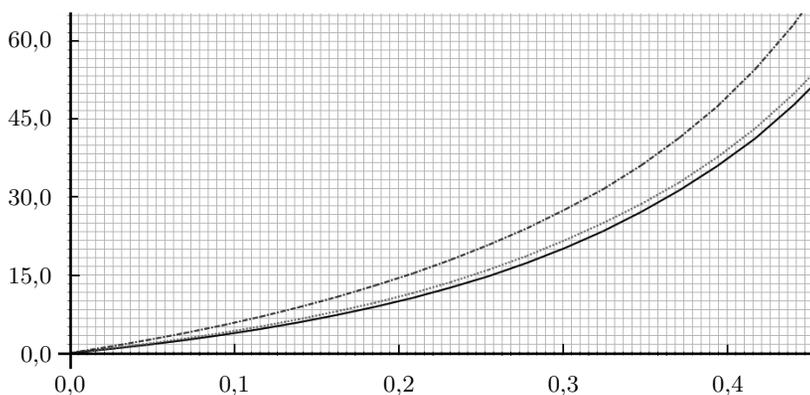


Рис. 3. Зависимости значений дисперсий очередей групповых пуассоновских потоков (сплошная линия – постоянное число заявок в пачках, точечная линия – пуассоновское распределение чисел заявок в пачках, пунктирная линия – экспоненциальное распределение)

Зависимости значений дисперсий очередей, представленные на рис. 3, различны даже при малых загрузках вследствие различия асимметрии распределений вероятностей чисел заявок в пачках рассматриваемых потоков.

§ 4. Заключение

В статье представлено аналитическое исследование статистических характеристик групповых пуассоновских потоков с проверкой результатов методом имитационного моделирования. С помощью интервального метода анализа очередей получены аналитические формулы для средней длины очереди, среднего квадрата очереди и дисперсии очереди в СМО с групповым пуассоновским потоком на входе. Показано, что дисперсия очереди зависит от третьего момента размера пачки заявок во входящем групповом пуассоновском потоке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишневецкий В.М., Дудин А.Н. Системы массового обслуживания с коррелированными входными потоками и их применение для моделирования телекоммуникационных сетей // Автомат. и телемех. 2017. № 8. С. 3–59. <https://www.mathnet.ru/rus/at14562>
2. Neuts M.F. A Versatile Markovian Point Process // J. Appl. Probab. 1979. V. 16. № 4. P. 764–779. <https://doi.org/10.2307/3213143>
3. Wamser F., Gasas P., Seufert M., Moldovan C., Tran-Gia P., Hossfeld T. Modeling the YouTube Stack: From Packets to Quality of Experience // Comput. Networks. 2016. V. 109. Part 2. P. 211–224. <https://doi.org/10.1016/j.comnet.2016.03.020>
4. Appenzeller G., Keslassy I., McKeown N. Sizing Router Buffers // Proc. 2004 Conf. on Applications, Technologies, Architectures, and Protocols for Computer Communications (SIGCOMM'04). Portland, USA. Aug. 30 – Sept. 3, 2004. P. 281–292. <https://doi.org/10.1145/1015467.1015499>
5. Lee J.-B., Kalva H. The VC-1 and H.264 Video Compression Standards for Broadband Video Services. New York: Springer, 2008. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-71043-3>
6. Li Z., Zhu X., Gahm J., Pan R., Hu H., Begen A.C., Oran D. Probe and Adapt: Rate Adaptation for HTTP Video Streaming at Scale // IEEE J. Select. Areas Commun. 2014. V. 32. № 4. P. 719–733. <https://doi.org/10.1109/JSAC.2014.140405>

7. Назаров А.А., Лопухова С.В. Полумарковские процессы и специальные потоки однородных событий. Томск: ИДО ТГУ, 2010. Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000405029> (дата обращения 26.10.2022).
8. Лихтциндер Б.Я. График мультисервисных сетей доступа (интервальный анализ и проектирование). М.: Науч.-тех. изд-во «Горячая линия – Телеком», 2019.
9. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979.

Лихтциндер Борис Яковлевич
 Поволжский государственный университет
 телекоммуникаций и информатики, Самара
lixt@psuti.ru

Привалов Александр Юрьевич
 Самарский национальный исследовательский университет
 им. академика С.П. Королева
privalov1967@gmail.com

Моисеев Виктор Игоревич
 Пермский государственный национальный
 исследовательский университет
vim@psu.ru

Поступила в редакцию
 18.12.2022

После доработки
 27.02.2023

Принята к публикации
 27.02.2023