

УДК 621.391 : 519.216.3

© 2023 г. Н.Г. Докучаев

**ПОЧТИ ИДЕАЛЬНЫЕ ПРЕДИКТОРЫ И КАУЗАЛЬНЫЕ ФИЛЬТРЫ
ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ**

Представлены линейные предикторы и каузальные фильтры для дискретных сигналов, имеющих различные виды дегенерации спектра. Эти предикторы и фильтры основаны на аппроксимации идеальных некаузальных передаточных функций каузальными передаточными функциями, представленными многочленами от Z -преобразования дискретной функции Хевисайда.

Ключевые слова: дискретные временные сигналы, прогнозирование, предикторы, фильтры, каузальные передаточные функции, каузальная аппроксимация, высокочастотные сигналы, низкочастотные сигналы.

DOI: 10.31857/S0555292323020031, **EDN:** PPTSEI

§ 1. Введение

Известно, что определенная дегенерация спектра может обеспечить возможности для прогнозирования и интерполяции сигналов (см., например, [1–9]). В данной статье рассматриваются дискретные сигналы в детерминированной среде, где наблюдается только одна траектория сигнала, а не набор выборок траекторий, которые позволили бы применить статистические методы. Метод, который мы используем, основан на частотном анализе. Известно, что эти сигналы, в принципе, могут быть предсказаны, т.е. позволяют однозначные экстраполяции из их прошлых наблюдений, если у них есть разрыв спектра, т.е. их Z -преобразование обращается в ноль на некотором сегменте единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (см., например, [10]). Этот разрыв может быть произвольно малым и может быть даже сведен к одной точке при определенных условиях на дегенерацию спектра в окрестности этой точки. Соответственно, идеальный фильтр низких или высоких частот преобразует непредсказуемый сигнал в предсказуемый. Вот почему эти идеальные фильтры не могут быть каузальными.

Для дискретных временных сигналов в [10, 11] были получены некоторые предикторы, основанные на иррациональных каузальных передаточных функциях. Соответствующие передаточные функции были представлены через экспоненты рациональных функций или степенных функций. В [12] также были построены некоторые фильтры нижних частот на основе аналогичного принципа.

В данной статье рассматриваются задачи предсказания и фильтрации для дискретных временных сигналов; предлагаются новые предикторы и каузальные фильтры, приближающие идеальные фильтры. Каузальные передаточные функции для этих предикторов и фильтров представлены в виде многочленов Z -преобразования дискретной функции Хевисайда, т.е. многочленов $(1 - z^{-1})^{-1}$. Для предикторов соответствующие передаточные функции аппроксимируют функцию $e^{i\omega T}$ на $\mathbb{T}$, где $\omega \in (-\pi, \pi]$ представляет частоту, а целое число $T > 0$ – предвыбранный гори-

зонт предсказания. Для фильтров соответствующие передаточные функции аппроксимируют вещественную ступенчатую функцию, представляющую след на $\mathbb{T}$ для Z -преобразования идеального фильтра. Аппроксимация возможна для сигналов с некоторым произвольно малым промежутком спектра; полученный сигнал может иметь более широкий предвыбранный промежуток спектра. Этот метод аппроксимации основан на подходе, разработанном в [13, 14] для предсказания непрерывных временных сигналов.

Результаты применимы как для высокочастотных сигналов, так и для сигналов, для которых спектр отсутствует на любом заданном сегменте $\mathbb{T}$, например, для низкочастотных сигналов. Более того, в статье показывается, что некоторые сигналы с недегенеративным спектром также могут быть предсказаны на половине временной оси при выполнении некоторых условий на некоторые специальные частотные характеристики, определяемые значениями сигнала только на этой половине временной оси.

Эти новые предикторы и фильтры позволяют явное представление во временной и частотной областях; кроме того, они не зависят от спектральных характеристик входных сигналов с заданной степенью спектральной дегенерации. Предлагается некоторый вычислительный подход на основе модельной подгонки.

Статья организована следующим образом. В § 2 формулируются определения. В § 3 формулируются основные теоремы о предсказуемости и предикторах (теоремы 1 и 2). В § 4 обсуждается представление передаточных функций во временной области. В § 5 обсуждаются некоторые проблемы реализации. В § 6 предлагается метод вычисления приближенных функций для экспонент $e^{i\omega}$. В § 7 предлагается расширение результатов на низкочастотные и другие сигналы. В § 8 содержатся доказательства.

§ 2. Постановка задачи

Некоторые обозначения. Через $\mathbb{Z}$ обозначаем множество всех целых чисел.

Через ℓ_r обозначаем множество всех функций (сигналов) $x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, для которых

$$|x|_{\ell_r} := \left(\sum_{t=-\infty}^{\infty} |x(t)|^r \right)^{1/r} < +\infty$$

для $r \in [1, \infty)$.

Для $x \in \ell_1$ или $x \in \ell_2$ мы обозначаем через $X = \mathcal{Z}x$ соответствующее Z -преобразование

$$X(z) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x(t)z^{-t}, \quad z \in \mathbb{T}.$$

Обратное Z -преобразование $\mathcal{Z}^{-1}X$ определяется как

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\omega}) e^{i\omega t} d\omega, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Если $x \in \ell_2$, то $X|_{\mathbb{T}}$ определено как элемент пространства $L_2(\mathbb{T}; \mathbb{C})$.

Через Ind обозначаем индикаторную функцию.

Некоторые определения. Пусть $E = \mathbb{R}$ или $E = \mathbb{C}$.

Пусть $\mathcal{X} \subset \ell_{\infty}$ – некоторое множество дискретных сигналов, принимающих значения в E .

Пусть $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ – множество всех непрерывных отображений $p: \mathcal{X} \rightarrow \ell_\infty$, таких что для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ и $\bar{t} \in \mathbb{Z}$ выполняется

$$p(x_1(\cdot))(t) = p(x_2(\cdot))(t)$$

для всех $t \leq \bar{t}$, если $x_1(t) = x_2(t)$ для всех $t \leq \bar{t}$. Другими словами, это множество “каузальных” отображений; мы будем искать предикторы и фильтры в этом классе.

Рассмотрим сначала проблему прогнозирования. Пусть задано целое число $T \geq 1$. Цель состоит в оценке значений $x(t+T)$ в текущие моменты времени t с использованием исторических значений наблюдаемого процесса $x(s)|_{s \leq t}$. Поэтому T является горизонтом прогнозирования в этом контексте.

Определение 1. Пусть $\mathcal{X} \subset \ell_\infty$ и $\tau \in \{-1, 0, +\infty\}$.

- (i) Будем говорить, что класс $\mathcal{X}$ является предсказуемым с горизонтом прогнозирования T до времени τ , если существует последовательность $\{\tilde{p}_d(\cdot)\}_{d=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ такая, что

$$\sup_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ t \leq \tau - T}} |x(t+T) - \tilde{y}_d(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad d \rightarrow +\infty \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

где

$$\tilde{y}_d(\cdot) = \tilde{p}_d(x(\cdot)).$$

- (ii) Мы говорим, что класс $\mathcal{X}$ равномерно предсказуем с горизонтом прогнозирования T до времени τ , если существует последовательность $\{\tilde{p}_d(\cdot)\}_{d=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}$, такая что

$$\sup_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ t \leq \tau - T}} |x(t+T) - \tilde{y}_d(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad d \rightarrow +\infty \quad \text{равномерно по} \quad x \in \mathcal{X},$$

где $\tilde{y}_d$ определена, как в пункте (i).

Функции $\tilde{y}_d(t)$ в определении выше могут рассматриваться как приближительные предсказания процесса $x(t+T)$.

Теперь рассмотрим задачу фильтрации.

Пусть задано некоторое $\Omega \in (0, \pi)$. Пусть функция $\Phi_\Omega: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ определена так, что

$$\Phi_\Omega(e^{i\omega}) = \text{Ind}_{|\omega| \geq \Omega}.$$

Рассмотрим идеальный высокочастотный фильтр, для которого след от его передаточной функции на $\mathbb{T}$ равен $\Phi_\Omega(e^{i\omega})$, $\omega \in (-\pi, \pi]$, т.е. полосой подавления фильтра является $(-\Omega, \Omega)$. Цель – найти такие каузальные передаточные функции, которые аппроксимируют некаузальную передаточную функцию высокочастотного фильтра $\Phi_\Omega(e^{i\omega})$ произвольно близко.

Определение 2. Пусть $\mathcal{X} \subset \ell_\infty$.

- (i) Будем говорить, что класс $\mathcal{X} \subset \ell_2$ допускает каузальную высокочастотную фильтрацию с полосой подавления $(-\Omega, \Omega)$, если существует последовательность $\{\tilde{p}_d(\cdot)\}_{d=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$, такая что

$$\sup_{t \in \mathbb{Z}} |\tilde{x}(t) - \tilde{y}_d(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad d \rightarrow +\infty \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

где

$$\tilde{x} = \mathcal{Z}^{-1}(\Phi_\Omega X), \quad \tilde{y}_d = \tilde{p}_d(x(\cdot)).$$

(ii) Будем говорить, что класс $\mathcal{X}$ допускает равномерную каузальную высокочастотную фильтрацию с полосой подавления $(-\Omega, \Omega)$, если существует последовательность $\{\tilde{p}_d(\cdot)\}_{d=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}$, такая что

$$\sup_{t \in \mathbb{Z}} |\tilde{x}(t) - \tilde{y}_d(t)| \rightarrow 0 \quad \text{равномерно по } x \in \mathcal{X},$$

где $\tilde{x}$ и $\tilde{y}_d$ определены, как в пункте (i).

В последнем определении операторы p_d представляют собой близкие к идеальным каузальные фильтры, которые обеспечивают для класса $\mathcal{X}$ произвольно близкую аппроксимацию некаузального идеального фильтра высоких частот, определенного его передаточной функцией Φ_Ω .

§ 3. Основной результат

Для $d = 0, 1, 2, \dots$ пусть Ψ_d^E – множество всех функций $\psi: \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$, представленных в виде

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^d \frac{a_k}{(1 - z^{-1})^k}, \quad (1)$$

где $a_k \in E$ могут быть любыми. Положим

$$\Psi^E := \bigcup_d \Psi_d^E.$$

Лемма 1. Для $\bar{\Omega} \in (0, \pi)$ пусть функция $\zeta: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ определена либо как $\zeta(\omega) = e^{i\omega T}$, либо как $\zeta(\omega) = \text{Ind}_{|\omega| \geq \bar{\Omega}}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует целое число $d = d(\varepsilon, T) > 0$ и функции $\psi_d \in \Psi_d^{\mathbb{R}}$, такие что

$$\sup_{\substack{\omega \in [-\pi, \pi] \\ |\omega| \geq \bar{\Omega}}} |\zeta(\omega) - \psi_d(e^{i\omega})| \leq \varepsilon. \quad (2)$$

Для $\bar{\Omega} \in (0, \pi)$ определим $\mathcal{X}(\bar{\Omega})$ как множество всех сигналов $x: \mathbb{Z} \rightarrow E$, таких что $x(\cdot) \in \ell_2$ и $X(e^{i\omega}) = 0$ для $\omega \in (-\bar{\Omega}, \bar{\Omega})$ и $X = \mathcal{Z}x$.

Кроме того, для $\tau = -1, 0$ определим $\mathcal{X}(\tau, \bar{\Omega})$ как множество всех действительных сигналов $x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, таких что $x(\cdot) \in \ell_2$ и выполняется следующее:

- Если $\tau = 0$, то

$$2 \sum_{t=-\infty}^{-1} \cos(\omega t) x(t) + x(0) = 0 \quad \text{для } \omega \in (-\bar{\Omega}, \bar{\Omega}). \quad (3)$$

- Если $\tau = -1$, то

$$\sum_{t=-\infty}^{-1} \sin(\omega t) x(t) = 0 \quad \text{для } \omega \in (-\bar{\Omega}, \bar{\Omega}). \quad (4)$$

Описанную выше особенность процессов из $\mathcal{X}(\tau, \bar{\Omega})$ мы назовем левосторонней вырожденностью спектра.

Далее, определим $\mathcal{X}(\infty, \bar{\Omega})$ как $\mathcal{X}(\bar{\Omega})$.

Теорема 1. Пусть заданы $\Omega \in (0, \pi)$ и $\tau \in \{-1, 0, +\infty\}$. Для $x \in \mathcal{X}(\tau, \Omega)$, рассмотренного в определении 1(i), а также для

$$x \in \mathcal{X}(\tau, \Omega) \cap \{x \in \ell_2 : |x|_{\ell_2} \leq 1\},$$

рассмотренного в определении 1(ii), предсказуемость до времени τ и равномерная предсказуемость до времени τ могут быть обеспечены последовательностью предикторов

$$p_d: \mathcal{X}(\Omega) \rightarrow \ell_2, \quad d = 1, 2, \dots,$$

определенных своими передаточными функциями $\psi_d(z)$, выбранными, как в лемме 1, с $\zeta(\omega) = e^{i\omega T}$. Более точно, для любого $\varepsilon > 0$ и $\hat{y}_d(t) = p_d(x(\cdot))(t)$ оценка

$$\sup_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ t \leq \tau - T}} |x(t + T) - \hat{y}_d(t)| \leq \varepsilon$$

выполняется, если d и ψ_d таковы, что (2) справедливо с $\zeta(\omega) = e^{i\omega T}$ для достаточно маленького ε .

Теорема 2. Для $\Omega \in (0, \pi)$ и любого $\Omega_0 \in (0, \Omega)$, для $x \in \mathcal{X}(\Omega_0)$ каузальная фильтрация, рассмотренная в определении 2(i), а также равномерная каузальная фильтрация для

$$x \in \mathcal{X}(\Omega_0) \cap \{x \in \ell_2 : |x|_{\ell_2} \leq 1\},$$

рассмотренная в определении 2(ii), могут быть обеспечены последовательностью каузальных фильтров

$$p_d: \mathcal{X}(\Omega) \rightarrow \ell_2, \quad d = 1, 2, \dots,$$

определенных своими передаточными функциями $\psi_d(z)$, выбранными как в лемме 1, с $\zeta(\omega) = \text{Ind } |\omega| \geq \Omega$. Более точно, для любого $\varepsilon > 0$ и $\hat{y}_d(t) = p_d(x(\cdot))(t)$ и любого $\tilde{x} = Z^{-1}(\Phi_\Omega X)$ оценка

$$\sup_{t \in \mathbb{Z}} |\tilde{x}(t) - \hat{y}_d(t)| \leq \varepsilon$$

выполнена, если d и ψ_d выбраны таким образом, что (2) выполняется с $\zeta(\omega) = \text{Ind } |\omega| \geq \Omega$ при достаточно малых ε .

Согласно этой теореме процесс с произвольно малым спектральным зазором $(-\Omega_0, \Omega_0)$ может быть преобразован с использованием каузальных операций в процесс с большим спектральным зазором до $(-\Omega, \Omega)$.

Можно отметить, что:

- Передаточные функции $\psi_d(z)$ являются аналитическими в области $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Если мы применим их следы $\psi_d(e^{i\omega})|_{\omega \in (-\pi, \pi]}$ на $\mathbb{T}$ для расчета выходных процессов для входов $x \in \mathcal{X}(\Omega)$, то мы получим те же выходы, что и для функций $\psi_d(e^{i\omega}) \text{Ind}_{\omega \in (-\pi, \pi], |\omega| \geq \Omega}$.
- Для вещественных входных процессов x выходы этих предикторов и фильтров являются вещественными.
- $p_d(\cdot)$ зависит от T и Ω через коэффициенты a_k в условиях теоремы 1, а $p_d(\cdot)$ зависит от Ω и Ω_0 через коэффициенты a_k в условиях теоремы 2.

§ 4. Представление операторов $p_d(\cdot)$ во временной области

Предположим, что $\bar{\Omega} = \Omega$ или $\bar{\Omega} = \Omega_0$.

Рассмотрим операторы h_k , определенные на $\mathcal{X}(\bar{\Omega})$ через их передаточные функции

$$H_k(z) = (1 - z^{-1})^{-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Другими словами, если $y = h_k(x)$ для $x \in \mathcal{X}(\bar{\Omega})$, то

$$Y(z) = (1 - z^{-1})^{-k} X(z)$$

для $Y = \mathcal{Z}y$ и $X = \mathcal{Z}x$. Очевидно, что

$$H_{k+1}(z) = H_1(z)H_k(z), \quad h_{k+1}(x(\cdot)) = h_1(h_k(x(\cdot))), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Следовательно, $h_k(x(\cdot)) \in \mathcal{X}(\bar{\Omega})$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots$, $x \in \mathcal{X}(\bar{\Omega})$. Значит, Z-преобразования процессов $h_k(x(\cdot))$ обращаются в нуль на множестве

$$\{e^{i\omega}, \omega \in [-\pi, \pi], |\omega| < \bar{\Omega}\},$$

и операторы $h_k: \mathcal{X}(\bar{\Omega}) \rightarrow \ell_2$ непрерывны при условии, что $\mathcal{X}(\bar{\Omega})$ является подпространством ℓ_2 , снабженным ℓ_2 -нормой.

Пусть $\mathbf{h}_1 \in \ell_\infty$ определен таким образом, что $\mathbf{h}_1(t) = 0$ для $t < 0$ и $\mathbf{h}_1(t) = 1$ для $t \geq 0$, т.е. $\mathbf{h}_1 = \mathcal{Z}^{-1}H_1(z)$.

Пусть

$$I_{\bar{\Omega}} := [-\pi, -\bar{\Omega}] \cup [\bar{\Omega}, \pi]$$

и $x \in \mathcal{X}(\bar{\Omega})$. Докажем, что во временной области оператор $h_1(x(\cdot))$ может быть представлен через свертку с ядром $\mathbf{h}_1$, т.е. если $x \in \mathcal{X}(\bar{\Omega})$, то

$$h_1(x(\cdot))(t) = \sum_{s=-\infty}^t x(s).$$

Пусть

$$\mathbf{h}_{1,m}(t) = \mathbf{h}_1(t) \text{Ind}_{\{t < m-1\}}.$$

Ясно, что $\mathbf{h}_{1,m} \in \ell_2$. Положим

$$H_{1,m}(z) := \mathcal{Z}\mathbf{h}_{1,m} = \frac{1 - z^{-m}}{1 - z^{-1}}, \quad R_m(z) := \mathcal{Z}(\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_{1,m}) = \frac{z^{-m}}{1 - z^{-1}}.$$

Очевидно, что

$$(1 - e^{-i\cdot})^{-1} e^{it\cdot} X(e^{i\cdot}) \in L_2(I_{\bar{\Omega}}, \mathbb{C})$$

для любого t . Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} R_m(e^{i\omega}) e^{i\omega t} X(e^{i\omega}) d\omega = \int_{I_{\bar{\Omega}}} \frac{e^{-im\omega}}{1 - e^{-i\omega}} e^{i\omega t} X(e^{i\omega}) d\omega \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow +\infty$$

для каждого $t \in \mathbb{Z}$. Отсюда следует, что если $x \in \mathcal{X}(\bar{\Omega})$, то

$$h_1(x(\cdot))(t) = \sum_{s=-\infty}^t x(s) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{Z}^{-1}(R_m + \mathcal{Z}\mathbf{h}_{1,m})(t) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{s=-m}^t x(s),$$

и ряд сходится для каждого $t \in \mathbb{Z}$.

Это означает, что

$$h_k(x(\cdot))(t) = \sum_{s=-\infty}^t (h_{k-1}(x(\cdot)))(s), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Следовательно, операторы p_d в теоремах 1, 2 можно представить в виде

$$p_d(x(\cdot))(t) = \sum_{k=0}^d a_k h_k(x(\cdot))(t),$$

где

$$h_k(x(\cdot))(t) = \sum_{s_{k-1}=-\infty}^t \sum_{s_{k-2}=-\infty}^{s_{k-1}} \dots \sum_{s_1=-\infty}^{s_2} \sum_{s=-\infty}^{s_1} x(s). \quad (5)$$

Все ряды здесь сходятся, как описано выше для h_1 .

Отметим, что если $x \in \mathcal{X}(\bar{\Omega}) \cap \ell_1$, то ряд $\sum_{s=-\infty}^t x(s)$ сходится абсолютно; однако для общего типа $x \in \mathcal{X}(\bar{\Omega})$ нет гарантии, что $x \in \ell_1$ или $h_k(x(\cdot)) \in \ell_1$.

§ 5. О вычислительных применениях теорем 1 и 2

Прямое применение предикторов, введенных в теоремах 1 и 2, требует вычисления сумм для полубесконечных рядов, что на практике невыполнимо. Однако эти теоремы могут привести к методам прогнозирования, обходящим этот расчет. Обсудим эти возможности.

Пусть $t_1 \in \mathbb{R}$ задано таким образом, что $t_1 < \tau$, где τ в условиях теоремы 1 описывается соответственным образом, и $\tau = +\infty$ в условиях теоремы 2. Пусть $x_k := h_k(x)$ для $x \in \mathcal{X}(\Omega_0)$, $k = 1, 2, \dots$, и пусть

$$\eta_k := x_k(t_1 - 1).$$

Лемма 2. В обозначениях теорем 1, 2 для любого t , такого что $t_1 \leq t < \tau + 1$, имеем, что $\hat{y}_d = p_d(x(\cdot))$ может быть представлено как

$$\hat{y}_d(t) = a_0 x(t) + \sum_{k=1}^d a_k \left(\sum_{l=1}^k c_l(t) \eta_l + f_k(t) \right). \quad (6)$$

Здесь $a_k \in \mathbb{R}$ являются коэффициентами для функций

$$\psi_d(z) = \sum_{k=1}^d a_k (1 - z^{-1})^{-k}$$

из теорем 1, 2,

$$f_k(t) = \sum_{\tau_1=t_1}^t \sum_{\tau_2=t_1}^{\tau_1} \dots \sum_{s=t_1}^{\tau_k} x_0(s)$$

и

$$c_1(t) = \sum_{\tau_1=t_1}^t \sum_{\tau_2=t_1}^{\tau_1} \dots \sum_{\tau_k=t_1}^{\tau_{k-1}} (\tau_k - t_1 + 1),$$

$$c_2(t) = \sum_{\tau_1=t_1}^t \sum_{\tau_2=t_1}^{\tau_1} \dots \sum_{\tau_{k-1}=t_1}^{\tau_{k-2}} (\tau_{k-1} - t_1 + 1),$$

$$c_l(t) = \sum_{\tau_1=t_1}^t \sum_{\tau_2=t_1}^{\tau_1} \dots \sum_{\tau_{l-1}=t_1}^{\tau_{k-l}} (\tau_{l-1} - t_1 + 1), \quad l = 1, 2, \dots, k-2,$$

$$c_{k-1}(t) = \sum_{\tau_1=t_1}^t (\tau_1 - t_1 + 1), \quad c_k(t) = t - t_1 + 1.$$

Эта лемма показывает, что вычисление $\hat{y}_d(t) = p_d(x(\cdot))(t)$ становится простым для $t > t_1$, если мы знаем все η_k , $k = 1, \dots, d$, и наблюдаем $x(s)|_{s=t_1, \dots, t}$.

Обсудим некоторые способы оценки η_k без вычисления бесконечных сумм. В первых, заметим, что (6) влечет за собой полезное свойство, которое приведено ниже.

Следствие 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует целое число $d = d(\varepsilon) > 0$ и $a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$, такие что для любого $t_1 \in \mathbb{Z}$ существуют $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_d \in \mathbb{R}$, такие что*

$$|\tilde{x}(t) - y_d(t)| \leq \varepsilon \quad \text{для всех } t \geq t_1,$$

где

$$y_d(t) = y_d(t, x(t), \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_d) := a_0 x(t) + \sum_{k=1}^d a_k \left(\sum_{l=1}^k c_l(t) \bar{\eta}_l + f_k(t) \right). \quad (7)$$

В этом следствии $d = d(\varepsilon)$ и $a_k \in \mathbb{R}$ определяются, как в теоремах 1, 2.

Случай задачи прогнозирования: условия теоремы 1. Рассмотрим использование формул (6) и (7) для вычисления η_k в условиях теоремы 1.

Предположим, что $\theta > t_1$ и $\theta < \tau + 1$. Пусть цель состоит в прогнозировании значения $\tilde{x}(t) = x(t + T)$, используя наблюдения за период времени $t \leq \theta$, в условиях теоремы 1. Если $\theta > t_1 + T$, то согласно следствию 1 есть возможность построить предсказатели, подгоняя параметры $\eta_0, \dots, \eta_d$ с использованием наблюдений из прошлого, доступных для $t = t_1, \dots, \theta - T$: можно сопоставить значения $y_d(t, x(t), \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_d)$ с наблюдениями из прошлого $x(t + T)$. Далее предполагаем, что $\theta > t_1 + T$.

Пусть d достаточно велико, чтобы $x(t + T)$ можно было приблизить значениями $\hat{y}_d(t)$, как описано в теореме 1, т.е.

$$\sup_{t \in \mathbb{Z}} |x(t + T) - \hat{y}_d(t)| \leq \varepsilon$$

для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и некоторого выбора a_k .

Как приближение истинных $\eta_1, \dots, \eta_d$ можно принять множество $\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_d$, такое что

$$|x(t + T) - y_d(t, x(t), \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_d)| \leq \varepsilon, \quad t = t_1, \dots, \theta - T. \quad (8)$$

(Напомним, что в момент времени θ значения $x(t + T)$ и $y_d(t, x(t), \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_d)$ наблюдаемы для $t = t_1, \dots, \theta - T$.) Если (8) выполнено, мы можем заключить, что величина $y_d(t, x(t), \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_d)$ дает приемлемое предсказание для $x(t + T)$ для этих t . Ясно, что теорема 1 подразумевает, что множество $\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_d$, обеспечивающее (8), существует, так как это неравенство выполняется при $\bar{\eta}_k = \eta_k$.

Соответствующее значение $y_d(\theta, x(t), \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_d)$ дало бы оценку для $\hat{y}_d(\theta)$ и, соответственно, для $x(\theta + T)$.

Далее, поиск множества $\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_d$, обеспечивающего (8), может быть сложным. Вместо этого можно рассмотреть подгонку предсказаний и наблюдений в конечном числе точек $t = t_1, \dots, T - \theta$.

Пусть дано целое число $\bar{d} \geq d$ и выбрано множество $\{t_m\}_{m=1}^{\bar{d}} \subset \mathbb{Z}$, такое что

$$t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{\bar{d}-1} < t_{\bar{d}} \leq \theta - T.$$

Мы предлагаем использовать наблюдения $x(t)$ в моменты времени $t = t_m$. Рассмотрим систему уравнений

$$a_0 x(t_m) + \sum_{k=1}^d a_k \left(\sum_{l=1}^k c_l(t_m) \bar{\eta}_l + f_k(t_m) \right) = \zeta_m, \quad m = 1, \dots, \bar{d}. \quad (9)$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\bar{d} = d$. В этом случае мы можем выбрать $\zeta_m = x(t_m + T)$; эти значения наблюдаются напрямую, без вычисления полубесконечных рядов, требующихся для $\hat{y}_d(t_m)$. Соответствующий выбор $\bar{\eta}_k$ обеспечивает нулевую ошибку предсказания для $x(t_m + T)$, $m = 1, \dots, \bar{d}$.

Включение в рассмотрение большего числа наблюдений, т.е. выбор более крупного $\bar{d} > d$ и более крупного множества $\{t_1, \dots, \theta - T\}$, улучшает оценку η_k . Если мы рассмотрим случай $\bar{d} > d$, то в общем случае не удастся добиться того, чтобы

$$y_d(t, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_d) = x(t_m + T) \quad \text{для всех } m,$$

так как нельзя гарантировать, что система (9) разрешима для $\zeta_m \equiv x(t_m + T)$: система будет переопределенной. Тем не менее оценка, представленная в (8), по-прежнему может быть получена для любого произвольно большого $\bar{d}$, так как выполнено (8). Решение можно найти, используя методы подгонки линейных моделей.

В настоящий момент неясна сходимость оценок, полученных из этих процедур, поскольку выбор меньшего ε приводит к большему d . Анализ этих методов оставляем для дальнейших исследований.

Случай проблемы каузальной фильтрации в рамках теоремы 2. В условиях теоремы 2 прошлые значения истинного неизвестного процесса $\tilde{x}(t)$ не наблюдаются, и следовательно, не могут быть использованы для подгонки значений $\eta_1, \dots, \eta_d$. Однако мы можем использовать то, что значения $\eta_1, \dots, \eta_k$ в (6), (7) по-прежнему такие же, как в условиях теоремы 2, где $\tilde{x}(t) = x(t + T)$. Поскольку прошлые значения $x(s)|_{s=t_1, \dots, t}$ наблюдаемы, мы можем использовать процедуру подгонки, основанную на теореме 1, для оценки $\eta_1, \dots, \eta_d$ с использованием (6), (7) с коэффициентами a_k , определенными для аппроксимации $\zeta(\omega) = e^{i\omega T}$, и с наблюдениями $x(t_m)$, $t_m \leq t$, как описано выше. После этого мы можем оценить $\tilde{x}(t)$ с помощью уравнения (6) снова с новыми коэффициентами a_k , определенными для аппроксимации $\zeta(\omega) = \text{Ind } |\omega| \leq \Omega$.

§ 6. Возможный выбор ψ_d для предикторов в условиях теоремы 1

Коэффициенты a_k для функций ψ_n могут быть найдены с использованием численных методов из классического анализа, таких как процедура Грама–Шмидта. В случае теоремы 1 для предикторов нахождение этих коэффициентов может быть упрощено, особенно для $T = 1$.

Продемонстрируем это.

Предположим, что $T = 1$. Для вещественного $\nu > 0$ определим на $\mathbb{C} \setminus 1$ функцию

$$\tilde{\psi}(\nu, z) := z \left(1 - \exp \frac{\nu}{1 - z} \right).$$

Эта функция является модификацией передаточной функции, введенной в [10] для предсказания сигналов с одноточечным спектральным вырождением.

Очевидно,

$$\text{Re } \frac{\nu}{1 - e^{i\omega}} = \nu \frac{1 - \cos(\omega)}{|1 - e^{i\omega}|^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } \nu \rightarrow -\infty$$

равномерно на множестве $\{e^{i\omega}, \omega \in (-\pi, \pi], |\omega| \geq \Omega\}$. Следовательно,

$$\psi(\nu, z) \rightarrow z \quad \text{при} \quad \nu \rightarrow -\infty$$

равномерно на множестве $\{e^{i\omega}, \omega \in (-\pi, \pi], |\omega| \geq \Omega\}$.

Далее, для $\varepsilon > 0$ выберем $\nu < 0$ таким образом, чтобы

$$|\psi(\nu, e^{i\omega}) - e^{i\omega}| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \omega \in (-\pi, \pi], \quad |\omega| \geq \Omega.$$

Функция $\tilde{\psi}(\nu, \cdot)$ является аналитической на $\mathbb{C} \setminus 1$ и ограничена на множестве $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |1 - z| > \delta\}$ для любого $\delta > 0$. Очевидно, что

$$\tilde{\psi}(\nu, z) := z \left(1 - \left(1 + \frac{\nu}{1-z} + \frac{1}{2} \left[\frac{\nu}{1-z} \right]^2 + \frac{1}{3!} \left[\frac{\nu}{1-z} \right]^3 + \dots + \frac{1}{d!} \left[\frac{\nu}{1-z} \right]^d + \dots \right) \right),$$

где

$$\tilde{\psi}_d(\nu, z) := -\frac{\nu z}{1-z} - \frac{z}{2} \left[\frac{\nu}{1-z} \right]^2 - \frac{z}{3!} \left[\frac{-\nu}{1-z} \right]^3 - \dots - \frac{z}{d!} \left[\frac{-\nu}{1-z} \right]^d,$$

и где сходимость равномерна на множестве $\{e^{i\omega}, \omega \in (-\pi, \pi], |\omega| \geq \Omega\}$.

Можно заметить, что функции $\psi_d(\nu, z)$ принадлежат множеству Ψ_d , так как

$$\frac{z}{1-z} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad \frac{1}{1-z} = 1 - \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z \neq 1.$$

Например,

$$\frac{z}{2} \left[\frac{\nu}{1-z} \right]^2 = \frac{\nu^2}{2(1-z^{-1})} \left(1 - \frac{1}{1-z^{-1}} \right).$$

Ясно, что можно выбрать d так, чтобы

$$|\psi(\nu, e^{i\omega}) - \psi_d(\nu, e^{i\omega})| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \omega \in (-\pi, \pi], \quad |\omega| \geq \Omega.$$

Для этого d и ν имеем

$$|\psi_d(\nu, e^{i\omega}) - e^{i\omega}| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \omega \in (-\pi, \pi], \quad |\omega| \geq \Omega.$$

Коэффициенты a_k могут быть вычислены из представления ψ_d в виде элемента Ψ_d .

Для случая $T > 1$ можно использовать функции $\psi_d(\nu, z)^T$.

§ 7. Сигналы низкой частоты и другие сигналы

Покажем, что результаты, полученные выше для сигналов высокой частоты, могут быть применены к сигналам более общего типа, описываемым следующим образом.

Пусть заданы $\Omega \in (0, \pi)$, $\Omega_0 \in (0, \Omega)$ и $\theta \in (-\pi, \pi)$, и пусть $\mathcal{Y}(\Omega, \theta)$ – множество всех сигналов $x \in \ell_2$, таких что $X(e^{i(\omega-\theta)}) = 0$ для $|\omega| < \Omega$, $\omega \in [-\pi, \pi]$, где $X = \mathcal{Z}x$.

Например, $\mathcal{Y}(\Omega, 0) = \mathcal{X}(\Omega)$; это множество включает высокочастотные сигналы, такие что $X(e^{i\omega}) = 0$, если $|\omega| < \Omega$. Соответственно, множество $\mathcal{Y}(\Omega, \pi)$ включает низкочастотные сигналы (сигналы с ограниченной полосой частот), такие что $X(e^{i\omega}) = 0$, если $\omega \in (-\pi, -\pi + \Omega) \cup (\pi - \Omega, \pi]$.

Для того чтобы предсказать сигнал $\hat{x} \in \mathcal{Y}(\Omega, \theta)$, его можно преобразовать в сигнал $x \in \mathcal{X}(\Omega) = \mathcal{Y}(\Omega, 0)$, например, как $x(t) = e^{-i\theta t} \hat{x}(t)$. Затем можно использовать для x предикторы, введенные в теореме 1. Предсказание $\hat{y}(t)$ для $\hat{x}(t)$ можно получить как

$$\hat{y}(t) = e^{i\theta t} y(t),$$

где $y(t)$ – соответствующее предсказание для $x(t)$.

Аналогичным образом можно построить каузальный фильтр, который для $x \in \mathcal{Y}(\Omega_0, \theta)$ производит приближение $\hat{x} \in \mathcal{Y}(\Omega, \theta)$, такое что $\hat{x} = \mathcal{Z}^{-1} \Phi_{\Omega, \theta} X$, где $X = \mathcal{Z}x$ и где $\Phi_{\Omega, \theta}$ задано как Z -преобразование идеального фильтра, такого что

$$\Phi_{\Omega, \theta}(e^{i(\omega - \theta)}) = \text{Ind}_{|\omega| > \Omega, \omega \in [-\pi, \pi]}.$$

Опять же, его можно преобразовать в сигнал $x \in \mathcal{X}(\Omega_0) = \mathcal{Y}(\Omega_0, 0)$ как $x(t) = e^{-i\theta t} \hat{x}(t)$. Затем можно использовать для x каузальный фильтр, введенный в теореме 2. Полученный фильтрованный сигнал $\hat{y}(t)$ для $\hat{x}(t)$ можно получить как

$$\hat{y}(t) = e^{i\theta t} y(t),$$

где $y(t)$ является соответствующим фильтрованным сигналом для $x(t)$.

В качестве альтернативы мы можем напрямую построить предикторы и фильтры для сигналов из $\mathcal{Y}(\Omega, \theta)$, аналогично тем, которые были представлены в теоремах 1 и 2, с передаточными функциями

$$\sum_{k=0}^d \frac{a_k}{(1 - e^{i\theta}/z)^k},$$

приближающих $e^{i\omega T}$ и $\text{Ind}_{|\omega| > \Omega}$ на $\mathbb{T}$.

В случае, когда $x \in \bigcup_{\theta} \mathcal{Y}(\Omega, \theta)$, а θ неизвестен, можно использовать подход из § 5, чтобы оценить θ из прошлых наблюдений в качестве нового неизвестного параметра.

§ 8. Доказательства

Доказательство леммы 1. Для множества $I \subset [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ пусть $\Gamma^E(I)$ (или $\Gamma_d^E(I)$) означает множество функций $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$, заданных как $\gamma(\omega) = \psi(e^{i\omega})$ для некоторой функции ψ из Ψ^E (или из Ψ_d^E , соответственно).

Положим

$$I_{\bar{\Omega}} := [-\pi, -\bar{\Omega}] \cup [\bar{\Omega}, \pi].$$

Ясно, что

$$\frac{1}{1 - z^{-1}} = 1 - \frac{1}{1 - z}$$

для всех $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$. Следовательно,

$$\overline{\left(\frac{1}{1 - 1/e^{i\omega}} \right)} = \frac{1}{1 - e^{i\omega}} = 1 - \frac{1}{1 - 1/e^{i\omega}}, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad \omega \neq 0.$$

Отсюда следует, что если $\psi(z) \in \Psi^E$, то $\psi(z^{-1}) \in \Psi^E$ для $E = \mathbb{R}$ и $E = \mathbb{C}$. Это означает, что $\overline{\gamma(\omega)} \in \Gamma^E(I_{\bar{\Omega}})$, если $\gamma(\omega) \in \Gamma^E(I_{\bar{\Omega}})$.

Поскольку функция

$$\gamma_1(\omega) = \operatorname{Re} \frac{1}{1 - e^{-i\omega}}$$

строга монотонна на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ и имеет разные знаки на этих двух интервалах, мы имеем, что $\gamma_1(\alpha) \neq \gamma_1(\beta)$ для всех $\alpha, \beta \in I_{\bar{\Omega}}$, $\alpha \neq \beta$. Отсюда следует, что множество функций $\Gamma^{\mathbb{C}}(I_{\bar{\Omega}})$ разделяет точки на компактном множестве $I_{\bar{\Omega}}$.

Из теоремы Стоуна – Вейерштрасса для комплекснозначных непрерывных функций на компактных множествах действительных чисел следует, что множество $\Gamma(I_{\bar{\Omega}})$ полно в пространстве $C(I_{\bar{\Omega}}; \mathbb{C})$ непрерывных комплекснозначных функций, заданных на $I_{\bar{\Omega}}$ с супремум-нормой (см., например, [15, теорема 10, с. 238]). Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $d > 0$ и $\hat{\gamma}_d \in \Gamma_d^{\mathbb{C}}(I_{\bar{\Omega}})$, представленная как

$$\hat{\gamma}_d(\omega) = \sum_{k=0}^d \frac{A_k}{(1 - e^{-i\omega})^k},$$

определенная для $\omega \in \mathbb{R} \setminus 0$, где $A_k \in \mathbb{C}$, так что

$$\left(\int_{I_{\bar{\Omega}}} |\zeta(\omega) - \hat{\gamma}_d(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \leq \varepsilon.$$

Для $\zeta(\omega) = e^{i\omega T}$ это следует непосредственно из теоремы 10 в [15, с. 238], упомянутой выше. Для $\zeta(\omega) = \operatorname{Ind}_{|\omega| \geq \bar{\Omega}}$ это следует из того факта, что множество $C(I_{\bar{\Omega}}; \mathbb{C})$ всюду плотно в $L_2(I_{\bar{\Omega}}; \mathbb{C})$, а сходимость в $C(I_{\bar{\Omega}}; \mathbb{C})$ влечет за собой сходимость в $L_2(I_{\bar{\Omega}}; \mathbb{C})$.

Покажем, что для $\gamma_d \in \Gamma_d^{\mathbb{R}}(I_{\bar{\Omega}})$ выполняется та же оценка, где

$$\gamma_d(\omega) = \sum_{k=0}^d \frac{a_k}{(1 - e^{-i\omega})^k},$$

а $a_k = \operatorname{Re} A_k$.

Предположим, что $\operatorname{Im} A_k \neq 0$ для некоторого k . Ясно, что действительная и мнимая части функции

$$\frac{i \operatorname{Im} A_k}{(1 - e^{-i\omega})^k}$$

являются четной и нечетной функциями соответственно. С другой стороны, функции $\operatorname{Re} e^{i\omega T} = \cos(\omega T)$ и $\operatorname{Im} e^{i\omega T} = \sin(\omega T)$ являются, соответственно, нечетной и четной на $\mathbb{R}$. Следовательно, замена A_k на $a_k = \operatorname{Re} A_k$ не может испортить оценку. Таким образом, передаточная функция

$$\psi_d(e^{i\omega}) = \gamma_d(\omega) = \sum_{k=0}^d \frac{a_k}{(1 - e^{-i\omega})^k}$$

удовлетворяет требуемой оценке. $\blacktriangle$

Доказательство теорем 1, 2. Рассмотрим сначала случай, когда $x \in \mathcal{X}(\infty, \Omega) = \mathcal{X}(\Omega)$.

Продолжим доказательство одновременно для теоремы 1 (с $\tau = +\infty$) и теоремы 2. Для доказательства теоремы 1 далее предполагаем, что $\bar{\Omega} = \Omega$ и функция $\zeta: I_{\bar{\Omega}} \rightarrow \mathbb{C}$ определена как $\zeta(\omega) = e^{i\omega T}$. Для доказательства теоремы 2 далее предполагаем, что $\bar{\Omega} = \Omega_0$ и $\zeta(\omega) = \operatorname{Ind}_{|\omega| \geq \bar{\Omega}}$.

Предположим, что оценка (2) выполняется для выбранных d, γ_d, ψ_d . Тогда

$$\tilde{x}(t) - \hat{y}_d(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} (\zeta(\omega) - \psi_d(e^{i\omega})) X(e^{i\omega}) d\omega,$$

где $\tilde{x}(t) = x(t+T)$ в постановке теоремы 1, а $\tilde{x}(t)$ является идеальным отфильтрованным процессом в постановке теоремы 2. Очевидно, что

$$\begin{aligned} |\tilde{x}(t) - \hat{y}_d(t)| &\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\zeta(\omega) - \psi_d(e^{i\omega})| d\omega \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\int_{I_{\bar{\Omega}}} |\zeta(\omega) - \psi_d(e^{i\omega})|^2 d\omega \right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{i\omega})|^2 d\omega \right)^{1/2} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Имеем

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{i\omega})|^2 d\omega \right)^{1/2} = \|x\|_{\ell_2}.$$

Следовательно, $|\tilde{x}(t) - \hat{y}_d(t)| \leq \varepsilon \|x\|_{\ell_2}$. Это дает доказательство теоремы 1 для случая $\tau = +\infty$ и теоремы 2.

Докажем теперь теорему 1 для случая $\tau = 0$. Пусть $x \in \mathcal{X}(0, \Omega)$. Определим четную функцию $\tilde{x}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ так, что $\tilde{x}(t) = x(t)$ для $t \leq 0$ и $\tilde{x}(t) = x(-t)$ для $t > 0$. Положим $\tilde{X} = \mathcal{Z}\tilde{x}$. Можно показать, что

$$\operatorname{Re} \tilde{X}(e^{i\omega}) = 2 \sum_{t=-\infty}^{-1} \cos(\omega t) x(t) + x(0)$$

и

$$\operatorname{Im} \tilde{X}(e^{i\omega}) = 0$$

для $\omega \in (-\pi, \pi]$. Это означает, что $\tilde{x} \in \mathcal{X}(\Omega)$. Кроме того, поскольку предикторы p_d являются каузальными операторами, следовательно, получаем

$$p_d(\tilde{x}(\cdot))(t) = p_d(x(\cdot))(t) \quad \text{для всех } t \leq 0.$$

Тогда доказательство для $\tau = 0$ следует из доказательства для случая $\tau = +\infty$.

Случай $\tau = -1$ можно рассмотреть аналогично. Для $x \in \mathcal{X}(-1, \Omega)$ определим нечетную функцию $\tilde{x}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ так, что $\tilde{x}(t) = x(t)$ для $t \leq -1$, $\tilde{x}(0) = 0$ и $\tilde{x}(t) = -x(-t)$ для $t > 0$. Положим $\tilde{X} = \mathcal{Z}\tilde{x}$. Можно показать, что

$$\operatorname{Re} \tilde{X}(e^{i\omega}) = 0$$

и

$$\operatorname{Im} \tilde{X}(e^{i\omega}) = 2 \sum_{t=-\infty}^{-1} \sin(\omega t) \tilde{x}(t)$$

для $\omega \in (-\pi, \pi]$. Отсюда следует, что $\tilde{x} \in \mathcal{X}(\Omega)$. Опять же, поскольку предикторы p_d являются каузальными, получаем

$$p_d(\tilde{x}(\cdot))(t) = p_d(x(\cdot))(t) \quad \text{для всех } t \leq -1.$$

Таким образом, доказательство для $\tau = -1$ следует из доказательства для случая $\tau = +\infty$, что завершает доказательство теоремы 1. $\blacktriangle$

Доказательство леммы 2. Имеем

$$x_k(t) = \eta_k + \sum_{s=t_1}^t x_{k-1}(s) = \sum_{l=1}^k c_l(t) \eta_l + f_k(t).$$

Далее, для любого $t \geq t_1$ имеем

$$y_d(t) = a_0 x(t) + \sum_{k=1}^d a_k x_k(t),$$

т.е.

$$y_d(t) = a_0 x(t) + \sum_{k=1}^d a_k \left(\eta_k + \sum_{s=t_1}^t x_{k-1}(s) \right). \quad (10)$$

Здесь мы предполагаем, что $x_0 := x$.

Кроме того, имеем

$$\sum_{\tau=t_1}^t x_1(\tau) = \sum_{\tau=t_1}^t \left(\eta_1 + \sum_{s=t_1}^{\tau} x_0(s) \right) = \eta_1(t - t_1 + 1) + \sum_{\tau=t_1}^t \sum_{s=t_1}^{\tau} x_0(s)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{\tau_1=t_1}^t x_2(\tau_1) &= \sum_{\tau_1=t_1}^t \left(\eta_2 + \sum_{s=t_1}^{\tau_1} x_1(s) \right) = \eta_2(t - t_1 + 1) + \sum_{\tau_1=t_1}^t \sum_{s=t_1}^{\tau_1} x_1(s) = \\ &= \eta_2(t - t_1 + 1) + \sum_{\tau_1=t_1}^t \left[\eta_1(\tau_1 - t_1 + 1) + \sum_{\tau_2=t_1}^{\tau_1} \sum_{s=t_1}^{\tau_2} x_0(s) \right] = \\ &= \eta_2(t - t_1 + 1) + \eta_1 \sum_{\tau_1=t_1}^t (\tau_1 - t_1 + 1) + \sum_{\tau_1=t_1}^t \sum_{\tau_2=t_1}^{\tau_1} \sum_{s=t_1}^{\tau_2} x_0(s). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \sum_{\tau_1=t_1}^t x_3(\tau_1) &= \sum_{\tau_1=t_1}^t \left(\eta_3 + \sum_{s=t_1}^{\tau_1} x_2(s) \right) = \eta_3(t - t_1 + 1) + \sum_{\tau_1=t_1}^t \sum_{s=t_1}^{\tau_1} x_2(s) = \\ &= \eta_3(t - t_1 + 1) + \sum_{\tau_1=t_1}^t \left[\eta_2(\tau_1 - t_1 + 1) + \sum_{\tau_2=t_1}^{\tau_1} \sum_{s=t_1}^{\tau_2} x_1(s) \right] = \\ &= \eta_3(t - t_1 + 1) + \eta_2 \sum_{\tau_1=t_1}^t (\tau_1 - t_1 + 1) + \sum_{\tau_1=t_1}^t \sum_{\tau_2=t_1}^{\tau_1} \sum_{\tau_3=t_1}^{\tau_2} x_1(\tau_3) = \\ &= \eta_3(t - t_1 + 1) + \eta_2 \sum_{\tau_1=t_1}^t (\tau_1 - t_1 + 1) + \sum_{\tau_1=t_1}^t \sum_{\tau_2=t_1}^{\tau_1} \sum_{\tau_3=t_1}^{\tau_2} \left[\eta_1 + \sum_{s=t_1}^{\tau_3} x_0(s) \right] = \\ &= \eta_3(t - t_1 + 1) + \eta_2 \sum_{\tau_1=t_1}^t (\tau_1 - t_1 + 1) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\tau_1=t_1}^t \sum_{\tau_2=t_1}^{\tau_1} \left[\eta_1(\tau_2 - t_1 + 1) + \sum_{s=t_1}^{\tau_2} \sum_{s=t_1}^{\tau_3} x_0(s) \right] = \\
& = \eta_3(t - t_1 + 1) + \eta_2 \sum_{\tau_1=t_1}^t (\tau_1 - t_1 + 1) + \sum_{\tau_1=t_1}^t \sum_{\tau_2=t_1}^{\tau_1} \eta_1(\tau_2 - t_1 + 1) + \\
& + \sum_{\tau_1=t_1}^t \sum_{\tau_2=t_1}^{\tau_1} \sum_{s=t_1}^{\tau_2} \sum_{s=t_1}^{\tau_3} x_0(s)
\end{aligned}$$

Аналогично получаем, что для $k > 2$ выполнено

$$\begin{aligned}
\sum_{s=t_1}^t x_k(s) &= \eta_k(t - t_1 + 1) + \eta_{k-1} \sum_{\tau_1=t_1}^t (\tau_1 - t_1 + 1) + \dots + \\
& + \eta_1 \sum_{\tau_1=t_1}^t \sum_{\tau_2=t_1}^{\tau_1} \dots \sum_{\tau_k=t_1}^{\tau_{k-1}} (\tau_k - t_1 + 1) + \sum_{\tau_1=t_1}^t \sum_{\tau_2=t_1}^{\tau_1} \dots \sum_{s=t_1}^{\tau_k} x_0(s).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$x_k(t) = \eta_k + \sum_{s=t_1}^t x_{k-1}(s) = \sum_{l=1}^k c_l(t) \eta_l + f_k(t).$$

Вместе с (10) это доказывает (7) и завершает доказательство леммы. ▲

§ 9. Заключительные замечания

- (i) Предложенный в данной статье подход позволяет дальнейшие модификации. В частности, другие некаузальные дискретные передаточные функции могут быть аппроксимированы каузальными передаточными функциями из Ψ^E . Фактически, любая передаточная функция $H(z)$ может быть аппроксимирована таким образом, если

$$\int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{i\omega})|^2 d\omega < +\infty.$$

- (ii) Можно показать, что в соответствии с [15, теорема 10, с. 238] аппроксимация

$$\zeta(\omega) = \text{Ind}_{|\omega| \geq \bar{\omega}}$$

в лемме 1 может быть достигнута на множестве действительных функций, представленных в виде

$$\gamma_d(\omega) = \psi_d(e^{i\omega}) = \sum_{k=0}^d b_k \left| \frac{1}{1 - e^{i\omega}} \right|^{2k} = \sum_{k=0}^d b_k \left(\frac{1}{1 - e^{-i\omega}} \right)^k \left(1 - \frac{1}{1 - e^{i\omega}} \right)^k$$

с $b_k \in \mathbb{R}$. Это может помочь упростить вычисления, так как это множество меньше, чем Ψ^R . Если b_k найдены, то мы можем получить коэффициенты a_k , необходимые для подгонки η_k через (6), (7).

- (iii) Предикторы, введенные в [10, 11], не позволяют применять описанную в § 5 процедуру подгонки, поскольку ядра соответствующих каузальных сверток сильно зависят от времени.

- (iv) В данной статье мы рассматриваем L_2 -аппроксимацию некаузальных передаточных функций; это позволяет аппроксимировать не непрерывные на $\mathbb{T}$ передаточные функции, используемые для задачи фильтрации. Кроме того, это позволяет использовать процедуру Грама – Шмидта для построения функций ψ_d . В непрерывном случае [14], где требовалась равномерная аппроксимация на бесконечных интервалах, это было невозможно.
- (v) В общем случае можно ожидать, что аппроксимирующие функции $\psi_d(e^{i\omega})$ принимают большие значения внутри интервала $(-\Omega, \bar{\Omega})$ для больших d в терминах леммы 1. Однако некоторую устойчивость предсказания и фильтрации с учетом зашумления можно установить аналогично [10]. Мы оставляем это для будущих исследований.
- (vi) Процессы из $\mathcal{X}(\tau, \Omega)$ не обязательно имеют спектральное вырождение для $\tau = -1, 0$ и $\Omega \in (0, \pi)$; их Z-преобразования могут быть отделены от нуля на $\mathbb{T}$. Однако теорема 1 показывает, что эти процессы предсказуемы на левой половине временной оси вследствие левосторонней вырожденности спектра, определенной в (3), (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Butzer P.L., Stens R.L.* Linear Prediction by Samples from the Past // Advanced Topics in Shannon Sampling and Interpolation Theory. New York: Springer, 1993. P. 157–183. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-9757-1_5
2. *Higgins J.R.* Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis: Foundations. Oxford: Clarendon; New York: Oxford Univ. Press, 1996.
3. *Li Z., Han J., Song Y.* On the Forecasting of High-Frequency Financial Time Series Based on ARIMA Model Improved by Deep Learning // J. Forecast. 2020. V. 39. № 7. P. 1081–1097. <https://doi.org/10.1002/for.2677>
4. *Luo S., Tian C.* Financial High-Frequency Time Series Forecasting Based on Sub-step Grid Search Long Short-Term Memory Network // IEEE Access. 2020. V. 8. P. 203183–203189. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3037102>
5. *Knab J.J.* Interpolation of Band-Limited Functions Using the Approximate Prolate Series // IEEE Trans. Inform. Theory. 1979. V. 25. № 6. P. 717–720. <https://doi.org/10.1109/TIT.1979.1056115>
6. *Lyman R.J., Edmonson W.W., McCullough S., Rao M.* The Predictability of Continuous-Time, Bandlimited Processes // IEEE Trans. Signal Process. 2000. V. 48. № 2. P. 311–316. <https://doi.org/10.1109/78.823959>
7. *Lyman R.J., Edmonson W.W.* Linear Prediction of Bandlimited Processes with Flat Spectral Densities // IEEE Trans. Signal Process. 2001. V. 49. № 7. P. 1564–1569. <https://doi.org/10.1109/78.928709>
8. *Papoulis A.* A Note on the Predictability of Band-limited Processes // Proc. IEEE. 1985. V. 73. № 8. P. 1332–1333. <https://doi.org/10.1109/PROC.1985.13284>
9. *Vaidyanathan P.P.* On Predicting a Band-limited Signal Based on Past Sample Values // Proc. IEEE. 1987. V. 75. № 8. P. 1125–1127. <https://doi.org/10.1109/PROC.1987.13856>
10. *Dokuchaev N.* Predictors for Discrete Time Processes with Energy Decay on Higher Frequencies // IEEE Trans. Signal Process. 2012. V. 60. № 11. P. 6027–6030. <https://doi.org/10.1109/TSP.2012.2212436>
11. *Dokuchaev N.* On Predictors for Band-limited and High-Frequency Time Series // Signal Process. 2012. V. 92. № 10. P. 2571–2575. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2012.04.006>
12. *Dokuchaev N.* Near-ideal Causal Smoothing Filters for the Real Sequences // Signal Process. 2016. V. 118. № 1. P. 285–293. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2015.07.002>
13. *Dokuchaev N.* Limited Memory Predictors Based on Polynomial Approximation of Periodic Exponentials // J. Forecast. 2022. V. 41. № 5. P. 1037–1045. <https://doi.org/10.1002/for.2843>

14. *Докучаев Н.Г.* Предикторы для высокочастотных сигналов на основе аппроксимации периодических экспонент рациональными многочленами // Пробл. передачи информ. 2022. Т. 58. № 4. С. 84–94. <https://doi.org/10.31857/S0555292322040076>
15. *Stone M.H.* The Generalized Weierstrass Approximation Theorem // Math. Mag. 1948. V. 21. № 4. P. 167–184; № 5. P. 237–254 (continued). <https://doi.org/10.2307/3029750>; <https://doi.org/10.2307/3029337>

Докучаев Николай Геннадьевич
 Институт ZJU-UIUC (Чжэцзянский университет –
 Иллинойский университет в Урбане-Шампейне),
 Чжэцзянский университет, Хайнин,
 провинция Чжэцзян, Китай
 Dokuchaev@intl.zju.edu.cn

Поступила в редакцию
 25.02.2023
 После доработки
 15.03.2023
 Принята к публикации
 15.03.2023