

УДК 621.391 : 519.173 : 004.722

© 2023 г. В. Гао, Х.М. Башконуш, К. Каттани

**ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ ПРИ АТАКАХ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ
ВАРИАНТА ИЗОЛИРОВАННОЙ ЖЕСТКОСТИ¹**

Модель сетевого графа является удобным инструментом для анализа сетей передачи информации, где возможность передачи в условиях атаки на объект можно описывать с помощью дробных критических графов, а уязвимость сети можно измерять с помощью варианта параметра изолированной жесткости. Рассматривается как устойчивость сети, так и реализуемость передачи данных при повреждении узлов, и определяется граница на вариант изолированной жесткости для дробных (a, b, n) -критических графов, где параметр n означает количество поврежденных узлов в определенный момент времени. С помощью контрпримера доказываем точность полученной границы на вариант изолированной жесткости. Основной теоретический вывод позволяет находить оптимальное соотношение между производительностью и стоимостью при проектировании топологии сети.

Ключевые слова: теория информации, сеть, граф, вариант изолированной жесткости, дробный (a, b, n) -критический граф.

DOI: 10.31857/S0555292323020067, **EDN:** PQHKAT

§ 1. Введение

В прошлом веке теория информации Шеннона заложила основы передачи информации по сетям и гарантировала реализуемость такой передачи. В настоящее время обработка информации в сети претерпела принципиальные изменения. Объем передаваемых данных резко возрос, и это приводит к тому, что при передаче информации необходимо учитывать ограниченность пропускной способности канала, ограниченный объем памяти в узлах, задержку в канале при стыковке фрагментов информации, сетевые атаки и другие факторы. В рамках модели сетевого графа вершины соответствуют узлам, ребра – каналам между узлами, а реализуемость передачи данных по сети может быть охарактеризована наличием дробного потока (дробный коэффициент работает как суррогатная модель) в соответствующем графе. В этой постановке из-за ограниченной пропускной способности канала большие данные разбиваются на несколько небольших фрагментов, передаются по различным каналам, и наконец, собираются воедино в конечной вершине (теоретический анализ см. в [1, 2]).

Однако реальная ситуация не так проста, как представляется. В случае кибератаки некоторые узлы и каналы повреждаются таким образом, что эффективная передача данных в исходной сети оказывается нарушенной. Кроме того, может потребоваться временно скорректировать первоначально запланированный маршрут передачи данных, т.е. определить, можно ли осуществить передачу данных в не подвергшемся атаке подграфе. С теоретической точки зрения дробный критический

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Национального научного фонда Китая (номер гранта 12161094).

граф определяет, существует ли дробный фактор в подграфе, оставшемся после удаления фиксированного числа вершин из исходного графа, и позволяет эффективно измерять возможность передачи данных в условиях кибератаки (см. [3, 4]).

С топологической точки зрения чем плотнее структура сети, тем она устойчивее. Напротив, разреженная сеть в результате атаки повреждается сильнее и оказывается более неустойчивой. Однако стоимость построения высокоплотной сети очень велика. В общем случае инженерам необходимо находить баланс между производительностью и стоимостью сети, а также снижать эксплуатационные расходы при условии выполнения поставленных требований. В связи с этим возникают следующие вопросы:

- 1) Как измерять топологию сети?
- 2) Как оценивать передачу данных в сети, подвергающейся атаке?
- 3) Как находить упомянутый оптимальный баланс?

Как уже говорилось выше, различные варианты дробных критических графов применяются для характеристики передачи данных в подвергающейся атакам сети, а значит, для решения второй из поставленных выше задач. Что касается первой задачи, то для нее вводится несколько параметров графов для измерения топологии сетей, моделируемых графами, таких как связующее число [5], жесткость [6] и ее вариант [7], изолированная жесткость [8] и ее вариант [9], и т.д. К нашему удовольствию, исследования последних двух десятилетий показали, что существует тесная взаимосвязь между этими параметрами графа и существованием дробных факторов, в том числе дробных критических графов, при различных обстоятельствах.

В последние годы многочисленные теоретические достижения в области условий на параметры дробных факторов заложили солидный фундамент в области передачи данных по сетям. В частности, достижения в области границ на параметры для дробных критических графов в основном были связаны с передачей данных в условиях сетевых атак. В работе [10] была получена точная граница на вариант изолированной жесткости для графа с дробным k -фактором. В [11] исследованы нечеткие дробные коэффициенты в нечетких графах, соответствующих сетям с неопределенной информацией. В [12] получена точная граница на изолированную жесткость, при которой граф является дробным (k, n) -критическим. В [13] исследовано условие объединения окрестностей для дробных (a, b, k) -критических покрытых графов. В [14] дробные (a, b, k) -критические покрытые графы рассматривались с точки зрения минимальной степени и окрестностей независимых множеств. Совсем недавно в работе [15] была установлена точная граница на изолированную жесткость, при которой граф является дробным (a, b, n) -критическим, а именно: граф G является дробным (a, b, n) -критическим, если

$$\delta(G) \geq a + n$$

и

$$I(G) > a - 1 + \frac{n + 1}{n_{a,b}},$$

где $n_{a,b}$ – наибольшее целое число, удовлетворяющее условию

$$b \geq (n_{a,b} - 1)a.$$

Несмотря на то, что уже получены обширные результаты об условиях существования дробных факторов через параметры графа, вопрос о точных границах на параметры графа в большинстве случаев остается открытым. Следует отметить, что нахождение точной границы на вариант изолированной жесткости, при которой существуют дробные факторы в конкретных постановках, является ключом к ответу на поставленный выше третий вопрос. Чем больше вариант изолированной

жесткости, тем больше плотность сети, тем устойчивее она к атакам и тем выше ее безопасность. Однако чем больше вариант изолированной жесткости, тем дороже построение соответствующей сети. Точная граница на вариант изолированной жесткости для дробных критических графов при определенных ограничениях позволяет инженерам находить оптимальный баланс между производительностью и стоимостью. С одной стороны, сеть, удовлетворяющая этой точной границе, обладает определенной степенью устойчивости и гарантирует передачу данных с определенной пропускной способностью при определенном уровне атак на узлы; с другой стороны, поскольку для варианта изолированной жесткости сети берется только нижняя граница, стоимость ее построения будет не слишком высока. Таким образом, это является стимулом для вывода точной границы на вариант изолированной жесткости для дробных критических графов в конкретных постановках.

Основным результатом данной статьи является определение точной границы на вариант изолированной жесткости для дробных (a, b, n) -критических графов. Дальнейшая часть статьи построена следующим образом. Вначале в § 2 приводятся обозначения и терминология, а также необходимые леммы. Затем в § 3 дается основная теорема и ее подробное доказательство. В заключительном § 4 обсуждаются некоторые перспективные направления для дальнейшей работы.

§ 2. Предварительные сведения

На протяжении всей статьи сети моделируются простыми конечными графами (т.е. ребра не имеют весов и направлений, петли отсутствуют, нет кратных ребер, число вершин конечно). Граф G состоит из множества вершин $V(G)$ и множества ребер $E(G)$, через $d_G(v)$ и $N_G(v)$ (или просто через $d(v)$ и $N(v)$) обозначаются, соответственно, степень и окрестность вершины v в G , и

$$\delta(G) = \min\{d_G(v) : v \in V(G)\}.$$

Пусть $G[S]$ – подграф графа G , индуцированный множеством $S \subseteq V(G)$. Обозначим через $i(G)$ число изолированных вершин в G . Оператор $\vee$ в записи $G_1 \vee G_2$ означает вставку ребер во всех парах (v_1, v_2) , таких что $v_1 \in V(G_1)$ и $v_2 \in V(G_2)$. Используемые нами, но не определяемые здесь обозначения и термины можно найти в стандартном учебнике по теории графов [16].

Пусть a, b, k – натуральные числа, такие что $1 \leq a \leq b$, и пусть $h: E(G) \rightarrow [0, 1]$ – индикаторная функция, заданная на множестве ребер. Дробным $[a, b]$ -фактором называется остовный подграф, состоящий из множества ребер

$$E_h = \{e \in E(G) \mid h(e) > 0\},$$

такой что

$$a \leq d_G^h(v) = \sum_{v' \in N(v)} h(vv') \leq b \quad (1)$$

для любой $v \in V(G)$. Граф G допускает дробный $[a, b]$ -фактор, если существует индикаторная функция h , удовлетворяющая условию (1). Для числа $n \in \mathbb{N}$ граф G называется дробным (a, b, n) -критическим графом, если при удалении любых n вершин из G остающийся подграф по-прежнему является дробным $[a, b]$ -фактором. В частности, если $a = b = k$, то понятия дробного $[a, b]$ -фактора и дробного (a, b, n) -критического графа вырождаются до дробного k -фактора и дробного (k, n) -критического графа соответственно. В модели сетевых графов дробный (a, b, n) -критический граф означает, что соответствующая сеть позволяет передавать данные (в заданном интервале пропускной способности) синхронно по различным каналам, когда n ее узлов повреждены при атаке.

Одним из важных параметров графа является *вариант изолированной жесткости*, введенный в [9], который формально определяется как

$$I'(G) = \min \left\{ \frac{|S|}{i(G-S)-1} \mid S \subset V(G), i(G-S) \geq 2 \right\},$$

если G не является полным графом, и $I'(G) = +\infty$, если граф G полный, так как в последнем случае подмножества вершин S , удовлетворяющего указанному условию, не существует. Следует отметить, что $I'(G)$ – единственный возможный вариант понятия изолированной жесткости. Представим себе, что имеется еще один вариант изолированной жесткости, выражаемый как наименьшее отношение $|S|$ к $i(G-S) - t$ для целого $t \geq 2$. В этом случае, чтобы знаменатель не оказался равен нулю, нужно ограничивать множество S условием $i(G-S) \geq t+1$, но такое подмножество вершин S не имеет никакого практического смысла (заметим, что наше условие $i(G-S) \geq 2$ означает, что S является разрезом в смысле изолированных вершин).

Для доказательства нашей основной теоремы в следующем параграфе нам потребуется необходимое и достаточное условие существования дробного (a, b, n) -критического графа.

Лемма 1 [17]. Пусть a, b, n – положительные целые числа, такие что $a \leq b$. Тогда граф G является дробным (a, b, n) -критическим графом, если и только если условие

$$b|S| - a|T| + \sum_{x \in T} d_{G-S}(x) \geq bn$$

выполнено для любого $S \subseteq V(G)$, такого что $|S| \geq n$, где

$$T = \{x \in V(G) - S \mid d_{G-S}(x) \leq a\}$$

(или, что равносильно, $T = \{x \in (G) - S \mid d_{G-S}(x) \leq a-1\}$).

При доказательстве основной теоремы в следующем параграфе для удобства рассуждений мы будем в основном использовать следующий равносильный вариант.

Лемма 2 [17]. Пусть a, b, n – положительные целые числа, такие что $a \leq b$. Тогда граф G является дробным (a, b, n) -критическим графом, если и только если условие

$$b|S| - a|T| + \sum_{x \in T} d_{G-S}(x) \geq bn$$

выполнено для любых непересекающихся подмножеств $S, T \subseteq V(G)$, таких что $|S| \geq n$.

§ 3. Основной результата и доказательство

Наш основной результат, представляющий точную границу на вариант изолированной жесткости, при которой граф является дробным (a, b, n) -критическим графом, состоит в следующем.

Теорема 1. Пусть G – граф, и пусть a, b, n – натуральные числа, такие что

$$2 \leq a \leq b \quad \text{и} \quad (n_{a,b} - 1)a \leq b \leq n_{a,b}a - 1,$$

где $n_{a,b} \geq 2$ – целое число. Если

$$\delta(G) \geq a + n$$

и

$$I'(G) > a - 1 + \frac{a + n}{n_{a,b} - 1},$$

то G является дробным (a, b, n) -критическим графом.

Очевидно, что условие $\delta(G) \geq a + n$ является точным для дробных (a, b, n) -критических графов. Чтобы установить точность условия на $I'(G)$ в теореме 1, рассмотрим

$$G = K_{n+1} \vee (n_{a,b}K_a),$$

где a, b, n – натуральные числа, такие что $b \geq a \geq 2$, а $n_{a,b} \geq 2$ – целое число, определенное в теореме 1. Используя определение варианта изолированной жесткости, получаем

$$I'(G) = \frac{(n+1) + n_{a,b}(a-1)}{n_{a,b} - 1} = a - 1 + \frac{a + n}{n_{a,b} - 1}.$$

Полагая $S = V(K_{n+1})$ и $T = V(n_{a,b}K_a)$, получаем

$$b|S| - a|T| + \sum_{x \in T} d_{G-S}(x) = b(n+1) - n_{a,b}a = bn + b - n_{a,b}a < bn,$$

откуда следует, что G не является дробным (a, b, n) -критическим графом в силу леммы 2.

Полагая $a = b = k$ в теореме 1, получаем $n_{a,b} = 2$, и таким образом, для дробных (k, n) -критических графов имеем следующее.

Следствие. Пусть G – граф, $k \geq 2$ и $n \geq 1$ – целые числа. Если

$$\delta(G) \geq k + n$$

и

$$I'(G) > 2k + n - 1,$$

то G является дробным (k, n) -критическим графом.

Полагая в этом следствии $n = 0$, немедленно получаем основной результат работы [10], что показывает, что утверждение теоремы 1 улучшает все известные до сих пор условия на вариант изолированной жесткости для дробных факторов.

Далее излагается подробное доказательство.

3.1. Доказательство теоремы 1. Для полного графа утверждение теоремы 1 следует из условия на минимальную степень $\delta(G) \geq a + n$. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только неполные графы. Предположим, что граф G удовлетворяет условиям теоремы 1, но не является дробным (a, b, n) -критическим графом. В обозначениях леммы 2 существуют непересекающиеся подмножества S и T множества вершин $V(G)$, такие что $|S| \geq n$ и

$$b|S| - a|T| + \sum_{x \in T} d_{G-S}(x) = b|S| + \sum_{x \in T} (d_{G-S}(x) - a) \leq bn - 1. \quad (2)$$

Выберем S и T такими, чтобы мощность $|T|$ была минимальной. При таком выборе $T \neq \emptyset$ и $d_{G-S}(x) \leq a - 1$ для любого $x \in T$. Более того, поскольку $\delta(G) \geq a + n$, можно утверждать следующее.

Наблюдение 1. $|S| \geq n + 1$.

Все компоненты в $G[T]$ (обозначим через $\mathcal{C}$ множество всех этих компонент) можно разделить на четыре класса (обозначим их $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ и $\mathcal{C}_4$):

- Класс 1 ($\mathcal{C}_1$): $C \in \mathcal{C}$, такие что $C \cong K_a$;
- Класс 2 ($\mathcal{C}_2$): $C \in \mathcal{C}$, такие что $C \cong K_1$;
- Класс 3 ($\mathcal{C}_3$): $C \in \mathcal{C} - \mathcal{C}_1$, такие что $d_{G-S}(v) = a - 1$ для любой $v \in V(C)$;
- Класс 4 ($\mathcal{C}_4$): $C \in \mathcal{C} - \{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3\}$.

Положим $\ell_1 = |\mathcal{C}_1|$, $\ell_2 = |\mathcal{C}_2|$, и пусть S' — множество вершин, содержащее ровно $a - 1$ вершин из каждой компоненты класса $\mathcal{C}_1$.

Если $|\mathcal{C}_3| + |\mathcal{C}_4| = 0$, то в силу неравенства (2) и наблюдения 1 получаем

$$n + 1 \leq |S| \leq \frac{a(\ell_1 + \ell_2) - 1}{b} + n,$$

т.е. $b \leq a(\ell_1 + \ell_2) - 1$, откуда следует, что $\ell_1 + \ell_2 \geq 2$ и

$$\ell_1 + \ell_2 \geq \frac{b + 1}{a} \geq \frac{(n_{a,b} - 1)a + 1}{a}.$$

Так как $\ell_1 + \ell_2$ — целое число, откуда следует, что $\ell_1 + \ell_2 \geq n_{a,b}$. Пользуясь определением варианта изолированной жесткости, убеждаемся, что

$$i(G - S \cup S') = \ell_1 + \ell_2 \geq 2$$

и

$$\begin{aligned} I'(G) &\leq \frac{|S \cup S'|}{i(G - S - S') - 1} \leq \frac{\left\lfloor \frac{a(\ell_1 + \ell_2) - 1}{b} + n + \ell_1(a - 1) \right\rfloor}{\ell_1 + \ell_2 - 1} \leq \\ &\leq \frac{\left\lfloor \left(a - 1 + \frac{a}{b}\right)(\ell_1 + \ell_2 - 1) + a - 1 + \frac{a - 1}{b} + n \right\rfloor}{\ell_1 + \ell_2 - 1} = \\ &= a - 1 + \frac{a - 1 + n + \left\lfloor \frac{a(\ell_1 + \ell_2) - 1}{b} \right\rfloor}{\ell_1 + \ell_2 - 1}. \end{aligned}$$

Положим $a(\ell_1 + \ell_2) - 1 = n_1 b + \varepsilon_1$, где $n_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\varepsilon_1 \in \{0, 1, \dots, b - 1\}$. Тогда в силу того, что

$$a - 1 + n + \frac{a - \varepsilon_1 - 1}{b} > 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} \max \left\{ \frac{a - 1 + n + \left\lfloor \frac{a(\ell_1 + \ell_2) - 1}{b} \right\rfloor}{\ell_1 + \ell_2 - 1} \right\} &= \max \left\{ \frac{a - 1 + n + \frac{a(\ell_1 + \ell_2) - 1}{b} - \frac{\varepsilon_1}{b}}{\ell_1 + \ell_2 - 1} \right\} = \\ &= \frac{a}{b} + \max \left\{ \frac{a - 1 + n + \frac{a - \varepsilon_1 - 1}{b}}{\ell_1 + \ell_2 - 1} \right\} = \frac{a}{b} + \frac{a - 1 + n + \frac{a - \varepsilon_1 - 1}{b}}{n_{a,b} - 1}, \end{aligned}$$

что показывает, что величина

$$a - 1 + \frac{a - 1 + n + \left\lfloor \frac{a(\ell_1 + \ell_2) - 1}{b} \right\rfloor}{\ell_1 + \ell_2 - 1}$$

принимает свое наибольшее значение, когда сумма $\ell_1 + \ell_2$ достигает своей нижней границы $n_{a,b}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} I'(G) &\leq a - 1 + \frac{a - 1 + n + \left\lfloor \frac{an_{a,b} - 1}{b} \right\rfloor}{n_{a,b} - 1} \leq a - 1 + \frac{a - 1 + n + \left\lfloor \frac{an_{a,b} - 1}{(n_{a,b} - 1)a} \right\rfloor}{n_{a,b} - 1} = \\ &= a - 1 + \frac{a + n}{n_{a,b} - 1}, \end{aligned}$$

что противоречит условию

$$I'(G) > a - 1 + \frac{a + n}{n_{a,b} - 1}.$$

Следовательно, $|C_3| + |C_4| > 0$.

По определению класса C_4 каждая компонента в C_4 имеет вершину степени не выше $a - 2$ в $G - S$. Таки образом, если $C_4 \neq \emptyset$, то $a \geq 3$, и его максимальное независимое множество I_4 можно выбрать с помощью следующей процедуры. Выберем вершину $v \in V(C_4)$ с минимальной степенью в $G - S$ (степень вычисляется в исходном подграфе $G - S$ в каждом раунде процедуры выбора). Удалим ее замкнутую окрестность в $G - S$ (т.е. $N_{G-S}(v) \cup \{v\}$) и продолжим выбор следующей вершины в $V(C_4)$ с помощью этого же принципа, пока не получим $V(C_4) = \emptyset$. В итоге выбранная последовательность вершин и даст нам множество I_4 .

Следующее наблюдение следует из того, что $\delta(G) \geq a + n$ и при этом в C_4 есть по крайней мере одна вершина степени не выше $a - 2$ в $G - S$.

Наблюдение 2. Если $C_4 \neq \emptyset$, то $|S| \geq n + 2$.

Положим $\Omega = V(G) - S - T$, выберем I_3 как максимальное независимое множество в C_3 , и пусть $\Theta = S \cup S' \cup N_{G-S}(I_3) \cup N_{G-S}(I_4)$. В общей ситуации следует рассмотреть два возможных случая.

Случай 1: $\ell_1 + \ell_2 \geq 1$. Убедимся, что множества C_3 и C_4 не могут существовать поодиночке. Для этого докажем следующие два утверждения.

Утверждение 1. Если $\ell_1 + \ell_2 \geq 1$, то $C_4 \neq \emptyset$.

Доказательство. Предположим, что $C_4 = \emptyset$. Тогда $C_3 \neq \emptyset$, так как $|C_3| + |C_4| > 0$.

Заметим, что I_3 можно разделить на следующие два подмножества I_{31} и I_{32} :

- $v \in I_{31}$, если существует $v' \in I_3 \setminus \{v\}$, такая что $N_{G-S}(v) \cap N_{G-S}(v') \neq \emptyset$;
- $v \in I_{32}$, если $N_{G-S}(v) \cap N_{G-S}(I_3 \setminus \{v\}) = \emptyset$.

Тогда получаем

$$\begin{aligned} b|S| &\leq |V(C_3)| + a\ell_1 + a\ell_2 + bn - 1 \leq \\ &\leq \left(a - \frac{1}{2}\right)|I_{31}| + (a - 1)|I_{32}| + a(\ell_1 + \ell_2) + bn - 1 \end{aligned}$$

и

$$|S| \leq \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{2b}\right)|I_{31}| + \frac{a-1}{b}|I_{32}| - \frac{1}{b} + \frac{a(\ell_1 + \ell_2)}{b} + n < \frac{a(\ell_1 + \ell_2 + |I_3|)}{b} + n.$$

Используя наблюдение 1, получаем

$$\ell_1 + \ell_2 + |I_3| > \frac{b}{a},$$

и тем самым, $\ell_1 + \ell_2 + |I_3| \geq n_{a,b}$. Кроме того,

$$\begin{aligned}
|S \cup S' \cup N_{G-S}(I_3)| &\leq \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{2b}\right)|I_{31}| + \frac{a-1}{b}|I_{32}| - \frac{1}{b} + \frac{a(\ell_1 + \ell_2)}{b} + n + \\
&+ \ell_1(a-1) + \left(a-1 - \frac{1}{2}\right)|I_{31}| + (a-1)|I_{32}| = \left(a-1 + \frac{a}{b} - \frac{b+1}{2b}\right)|I_{31}| + \\
&+ \left(a-1 + \frac{a}{b} - \frac{1}{b}\right)|I_{32}| + \frac{a}{b}\ell_2 + \left(a-1 + \frac{a}{b}\right)\ell_1 + n - \frac{1}{b} \leq \\
&\leq \left(a-1 + \frac{a}{b}\right)(\ell_1 + \ell_2) + \left(a-1 + \frac{a}{b} - \frac{1}{b}\right)|I_3| + n - \frac{1}{b} \leq \\
&\leq \left(a-1 + \frac{a}{b}\right)(|I_3| + \ell_1 + \ell_2) + n - \frac{2}{b},
\end{aligned}$$

и таким образом,

$$\begin{aligned}
I'(G) &\leq \frac{|S \cup S' \cup N_{G-S}(I_3)|}{i(G-S \cup S' \cup N_{G-S}(I_3)) - 1} \leq \\
&\leq \frac{\left\lfloor \left(a-1 + \frac{a}{b}\right)(|I_3| + \ell_1 + \ell_2 - 1) + a-1 + \frac{a-2}{b} + n \right\rfloor}{|I_3| + \ell_1 + \ell_2 - 1} = \\
&= a-1 + \frac{\left\lfloor \frac{a(|I_3| + \ell_1 + \ell_2) - 2}{b} \right\rfloor + a-1 + n}{|I_3| + \ell_1 + \ell_2 - 1}.
\end{aligned}$$

Пусть $a(|I_3| + \ell_1 + \ell_2) - 2 = n_2b + \varepsilon_2$, где $n_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\varepsilon_2 \in \{0, 1, \dots, b-1\}$. Тогда получаем

$$\begin{aligned}
\max \left\{ \frac{\left\lfloor \frac{a(|I_3| + \ell_1 + \ell_2) - 2}{b} \right\rfloor + a-1 + n}{|I_3| + \ell_1 + \ell_2 - 1} \right\} &= \\
= \max \left\{ \frac{\frac{a(|I_3| + \ell_1 + \ell_2) - 2 - \varepsilon_2}{b} + a-1 + n}{|I_3| + \ell_1 + \ell_2 - 1} \right\} &= \\
= \frac{a}{b} + \max \left\{ \frac{a-1 + n + \frac{a-2-\varepsilon_2}{b}}{|I_3| + \ell_1 + \ell_2 - 1} \right\}.
\end{aligned}$$

Так как $a-1 + n + \frac{a-2-\varepsilon_2}{b} > 0$, то величина

$$\frac{\left\lfloor \frac{a(|I_3| + \ell_1 + \ell_2) - 2}{b} \right\rfloor + a-1 + n}{|I_3| + \ell_1 + \ell_2 - 1}$$

принимает свое максимальное значение, когда сумма $|I_3| + \ell_1 + \ell_2$ достигает своей нижней границы $n_{a,b}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
I'(G) &\leq a-1 + \frac{\left\lfloor \frac{an_{a,b} - 2}{b} \right\rfloor + a-1 + n}{n_{a,b} - 1} \leq a-1 + \frac{\left\lfloor \frac{an_{a,b} - 2}{(n_{a,b} - 1)a} \right\rfloor + a-1 + n}{n_{a,b} - 1} = \\
&= a-1 + \frac{n+a}{n_{a,b} - 1},
\end{aligned}$$

что противоречит предположению о величине $I'(G)$. $\blacktriangle$

Утверждение 2. Если $\ell_1 + \ell_2 \geq 1$, то $\mathcal{C}_3 \neq \emptyset$.

Доказательство. Если $\mathcal{C}_3 = \emptyset$, то $\mathcal{C}_4 \neq \emptyset$, так как $|\mathcal{C}_3| + |\mathcal{C}_4| > 0$, и следовательно, $a \geq 3$.

Пусть $I_4 = \{v_1, v_2, \dots, v_{|I_4|}\}$, где $d_{G-S}(v_1) \leq a - 2$ и

$$d_{G-S}(v_1) \leq d_{G-S}(v_2) \leq \dots \leq d_{G-S}(v_{|I_4|}).$$

Тогда имеем $|T| = |V(\mathcal{C}_4)| + a\ell_1 + \ell_2$,

$$\begin{aligned} b|S| &\leq a|T| - d_{G-S}(T) + bn - 1 \leq \\ &\leq a\ell_1 + a\ell_2 + \sum_{i=1}^{|I_4|} (d_{G-S}(v_i) + 1)(a - d_{G-S}(v_i)) + bn - 1 \end{aligned}$$

и

$$|S| \leq \frac{a(\ell_1 + \ell_2)}{b} + \frac{\sum_{i=1}^{|I_4|} (d_{G-S}(v_i) + 1)(a - d_{G-S}(v_i))}{b} + n - \frac{1}{b}.$$

Получаем, что $i(G - \Theta) \geq 2$, где $\Theta = S \cup S' \cup N_{G-S}(I_4)$, и

$$\begin{aligned} |\Theta| &\leq |S| + |S'| + |N_{G-S}(I_4)| \leq \frac{a(\ell_1 + \ell_2)}{b} + \\ &+ \frac{\sum_{i=1}^{|I_4|} (d_{G-S}(v_i) + 1)(a - d_{G-S}(v_i))}{b} + n - \frac{1}{b} + \ell_1(a - 1) + \sum_{i=1}^{|I_4|} d_{G-S}(v_i) = \\ &= \frac{a\ell_2}{b} + \ell_1 \left(a - 1 + \frac{a}{b} \right) + \sum_{i=1}^{|I_4|} \left(-\frac{d_{G-S}^2(v_i)}{b} + \frac{a + b - 1}{b} d_{G-S}(v_i) + \frac{a}{b} \right) + n - \frac{1}{b} \leq \\ &\leq \frac{a\ell_2}{b} + \ell_1 \left(a - 1 + \frac{a}{b} \right) + \left(-\frac{(a-2)^2}{b} + \frac{a+b-1}{b}(a-2) + \frac{a}{b} \right) + \\ &+ (|I_4| - 1) \left(-\frac{(a-1)^2}{b} + \frac{a+b-1}{b}(a-1) + \frac{a}{b} \right) + n - \frac{1}{b} = \\ &= \frac{a\ell_2}{b} + \ell_1 \left(a - 1 + \frac{a}{b} \right) + \left(a - 1 + \frac{a}{b} \right) |I_4| + n - 1 + \frac{a-3}{b}. \end{aligned}$$

Чтобы найти экстремум величины $I'(G)$, будем максимизировать $|\Theta|$ при фиксированном значении $|I_4|$, тогда только одна вершина из I_4 имеет степень $a - 2$ в $G - S$, а все остальные имеют степень $a - 1$ в $G - S$. Чтобы оценить сумму $\ell_1 + \ell_2 + |I_4|$, заново оценим $|S|$ сверху как

$$\begin{aligned} |S| &\leq \frac{a(\ell_1 + \ell_2)}{b} + \frac{(|I_4| - 1)(a - 1 + 1)(a - (a - 1)) + (a - 2 + 1)(a - (a - 2))}{b} + \\ &+ n - \frac{1}{b} = \frac{a(\ell_1 + \ell_2 + |I_4|) + a - 3}{b} + n. \end{aligned}$$

С учетом наблюдения 2 имеем

$$2 + n \leq |S| \leq \frac{a(\ell_1 + \ell_2 + |I_4|) + a - 3}{b} + n,$$

откуда

$$\ell_1 + \ell_2 + |I_4| \geq \frac{2b - a + 3}{a} \geq \frac{2(n_{a,b} - 1)a - a + 3}{a} = 2n_{a,b} - 3 + \frac{3}{a},$$

т.е. $\ell_1 + \ell_2 + |I_4| \geq 2n_{a,b} - 2$.

Используя определение варианта изолированной жесткости, получаем

$$\begin{aligned} I'(G) &\leq \frac{|\Theta|}{i(G - \Theta) - 1} \leq \\ &\leq \frac{\left\lfloor \frac{a\ell_2}{b} + \ell_1 \left(a - 1 + \frac{a}{b} \right) + \left(a - 1 + \frac{a}{b} \right) |I_4| + n - 1 + \frac{a - 3}{b} \right\rfloor}{|I_4| + \ell_1 + \ell_2 - 1} \leq \\ &\leq \frac{\left\lfloor \left(a - 1 + \frac{a}{b} \right) (\ell_1 + \ell_2 + |I_4| - 1) + \left(a - 1 + \frac{a}{b} \right) + n - 1 + \frac{a - 3}{b} \right\rfloor}{|I_4| + \ell_1 + \ell_2 - 1} = \\ &= a - 1 + \frac{a + n - 2 + \left\lfloor \frac{a(\ell_1 + \ell_2 + |I_4|) + a - 3}{b} \right\rfloor}{|I_4| + \ell_1 + \ell_2 - 1}. \end{aligned}$$

Пусть $a(|I_4| + \ell_1 + \ell_2) + a - 3 = n_3b + \varepsilon_3$, где $n_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\varepsilon_3 \in \{0, 1, \dots, b - 1\}$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} &\max \left\{ \frac{a + n - 2 + \left\lfloor \frac{a(\ell_1 + \ell_2 + |I_4|) + a - 3}{b} \right\rfloor}{|I_4| + \ell_1 + \ell_2 - 1} \right\} = \\ &= \max \left\{ \frac{a + n - 2 + \frac{a(\ell_1 + \ell_2 + |I_4|) + a - 3 - \varepsilon_3}{b}}{|I_4| + \ell_1 + \ell_2 - 1} \right\} = \\ &= \frac{a}{b} + \max \left\{ \frac{a + n - 2 + \frac{2a - 3 - \varepsilon_3}{b}}{|I_4| + \ell_1 + \ell_2 - 1} \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, величина

$$\frac{a + n - 2 + \left\lfloor \frac{a(\ell_1 + \ell_2 + |I_4|) + a - 3}{b} \right\rfloor}{|I_4| + \ell_1 + \ell_2 - 1}$$

принимает свое максимальное значение, когда сумма $|I_4| + \ell_1 + \ell_2$ достигает своей нижней границы $2n_{a,b} - 2$, так как

$$a + n - 2 + \frac{2a - 3 - \varepsilon_3}{b} > 0.$$

Получаем

$$\begin{aligned} I'(G) &\leq a - 1 + \frac{a + n - 2 + \left\lfloor \frac{a(2n_{a,b} - 2) + a - 3}{b} \right\rfloor}{2n_{a,b} - 2 - 1} \leq \\ &\leq a - 1 + \frac{a + n - 2 + \left\lfloor \frac{a(2n_{a,b} - 2) + a - 3}{(n_{a,b} - 1)a} \right\rfloor}{2n_{a,b} - 3} = a - 1 + \frac{a + n}{2n_{a,b} - 3}, \end{aligned}$$

что противоречит условиям

$$I'(G) > a - 1 + \frac{n + a}{n_{a,b} - 1}$$

и $n_{a,b} \geq 2$. ▲

Итак, в силу утверждений 1, 2 имеем $\mathcal{C}_3 \neq \emptyset$, $\mathcal{C}_4 \neq \emptyset$ и $a \geq 3$.

Пусть $I_4 = \{v_1, v_2, \dots, v_{|I_4|}\}$, как в доказательстве утверждения 2. Тогда имеем

$$\begin{aligned} |T| &= |V(\mathcal{C}_3)| + |V(\mathcal{C}_4)| + \ell_2 + a\ell_1, \\ b|S| &\leq a|T| - d_{G-S}(T) + bn - 1 \leq a(\ell_1 + \ell_2) + \left(a - \frac{1}{2}\right)|I_{31}| + (a - 1)|I_{32}| + \\ &+ \sum_{i=1}^{|I_4|} (d_{G-S}(v_i) + 1)(a - d_{G-S}(v_i)) + bn - 1 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} |S| &\leq \frac{1}{b} \left(a(\ell_1 + \ell_2) + \left(a - \frac{1}{2}\right)|I_{31}| + (a - 1)|I_{32}| + \right. \\ &+ \left. \sum_{i=1}^{|I_4|} (d_{G-S}(v_i) + 1)(a - d_{G-S}(v_i)) + bn - 1 \right) = \frac{a}{b}(\ell_1 + \ell_2) + \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{2b}\right)|I_{31}| + \\ &+ \frac{a - 1}{b}|I_{32}| + \frac{\sum_{i=1}^{|I_4|} (d_{G-S}(v_i) + 1)(a - d_{G-S}(v_i))}{b} + n - \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

Получаем $i(G - \Theta) \geq 3$, где

$$\Theta = S \cup S' \cup N_{G-S}(I_3) \cup N_{G-S}(I_4).$$

В соответствии с вычислениями, проведенными в доказательствах утверждений 1, 2, имеем

$$\begin{aligned} |\Theta| &\leq \frac{a}{b}(\ell_1 + \ell_2) + \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{2b}\right)|I_{31}| + \frac{a - 1}{b}|I_{32}| + \\ &+ \frac{\sum_{i=1}^{|I_4|} (d_{G-S}(v_i) + 1)(a - d_{G-S}(v_i))}{b} + n - \frac{1}{b} + \ell_1(a - 1) + \left(a - \frac{1}{2} - 1\right)|I_{31}| + \\ &+ (a - 1)|I_{32}| + \sum_{i=1}^{|I_4|} d_{G-S}(v_i) \leq \frac{a}{b}\ell_1 + \ell_2 \left(a - 1 + \frac{a}{b}\right) + \left(a - 1 + \frac{a}{b} - \frac{1}{b}\right)|I_3| + \\ &+ \left(a - 1 + \frac{a}{b}\right)|I_4| + n - 1 + \frac{a - 3}{b} \leq (\ell_1 + \ell_2) \left(a - 1 + \frac{a}{b}\right) + \left(a - 1 + \frac{a}{b}\right)|I_3| + \\ &+ \left(a - 1 + \frac{a}{b}\right)|I_4| + n - 1 + \frac{a - 4}{b}. \end{aligned}$$

При максимизации $|\Theta|$ только одна вершина из I_4 имеет степень $a - 2$ в $G - S$, а остальные имеют степень $a - 1$ в $G - S$. Чтобы оценить сумму $\ell_1 + \ell_2 + |I_3| + |I_4|$,

заново оценим $|S|$ сверху как

$$\begin{aligned} |S| &\leq \frac{a(\ell_1 + \ell_2)}{b} + \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{2b}\right)|I_3| + \\ &+ \frac{(|I_4| - 1)(a - 1 + 1)(a - (a - 1)) + (a - 2 + 1)(a - (a - 2))}{b} + n - \frac{1}{b} < \\ &< \frac{a(\ell_1 + \ell_2 + |I_3| + |I_4|) + a - 3}{b} + n. \end{aligned}$$

Согласно наблюдению 2 получаем

$$2 + n \leq |S| < \frac{a(\ell_1 + \ell_2 + |I_3| + |I_4|) + a - 3}{b} + n,$$

откуда

$$\ell_1 + \ell_2 + |I_3| + |I_4| > \frac{2b - a + 3}{a} \geq \frac{2(n_{a,b} - 1)a - a + 3}{a} = 2n_{a,b} - 3 + \frac{3}{a},$$

т.е.

$$\ell_1 + \ell_2 + |I_3| + |I_4| \geq 2n_{a,b} - 2.$$

Используя определение величины $I'(G)$, получаем

$$\begin{aligned} I'(G) &\leq \frac{|\Theta|}{i(G - \Theta) - 1} \leq \\ &\leq \frac{\left\lfloor \left(a - 1 + \frac{a}{b}\right)(\ell_1 + \ell_2 + |I_3| + |I_4| - 1) + \left(a - 1 + \frac{a}{b}\right) + n - 1 + \frac{a - 4}{b} \right\rfloor}{|I_3| + |I_4| + \ell_1 + \ell_2 - 1} = \\ &= a - 1 + \frac{a + n - 2 + \left\lfloor \frac{a(|I_3| + |I_4| + \ell_1 + \ell_2) + a - 4}{b} \right\rfloor}{|I_3| + |I_4| + \ell_1 + \ell_2 - 1}. \end{aligned}$$

Пусть $a(|I_3| + |I_4| + \ell_1 + \ell_2) + a - 4 = n_4b + \varepsilon_4$, где $n_4 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\varepsilon_4 \in \{0, 1, \dots, b - 1\}$. Тогда

$$\begin{aligned} &\max \left\{ \frac{a + n - 2 + \left\lfloor \frac{a(|I_3| + |I_4| + \ell_1 + \ell_2) + a - 4}{b} \right\rfloor}{|I_3| + |I_4| + \ell_1 + \ell_2 - 1} \right\} = \\ &= \max \left\{ \frac{a + n - 2 + \frac{a(|I_3| + |I_4| + \ell_1 + \ell_2) + a - 4 - \varepsilon_4}{b}}{|I_3| + |I_4| + \ell_1 + \ell_2 - 1} \right\} = \\ &= \frac{a}{b} + \max \left\{ \frac{a + n - 2 + \frac{2a - 4 - \varepsilon_4}{b}}{|I_3| + |I_4| + \ell_1 + \ell_2 - 1} \right\}. \end{aligned}$$

Так как

$$a + n - 2 + \frac{2a - 4 - \varepsilon_4}{b} > 0,$$

то величина

$$\frac{a + n - 2 + \frac{2a - 4 - \varepsilon_4}{b}}{|I_3| + |I_4| + \ell_1 + \ell_2 - 1}$$

принимает свое максимальное значение, когда сумма $|I_3| + |I_4| + \ell_1 + \ell_2$ достигает нижней границы $2n_{a,b} - 2$. Получаем

$$\begin{aligned} I'(G) &\leq a - 1 + \frac{a + n - 2 + \left\lfloor \frac{a(2n_{a,b} - 2) + a - 4}{b} \right\rfloor}{2n_{a,b} - 2 - 1} \leq \\ &\leq a - 1 + \frac{a + n - 2 + \left\lfloor \frac{a(2n_{a,b} - 2) + a - 4}{(n_{a,b} - 1)a} \right\rfloor}{2n_{a,b} - 3} \leq a - 1 + \frac{a + n}{2n_{a,b} - 3}, \end{aligned}$$

что противоречит условиям

$$I'(G) > a - 1 + \frac{n + a}{n_{a,b} - 1}$$

и $n_{a,b} \geq 2$.

Случай 2: $\ell_1 + \ell_2 = 0$. Аналогично случаю 1 утверждения 3 и 4 покажут, что множества $\mathcal{C}_3$ и $\mathcal{C}_4$ не могут существовать поодиночке.

Утверждение 3. Если $\ell_1 + \ell_2 = 0$, то $\mathcal{C}_4 \neq \emptyset$.

Доказательство. Если $\mathcal{C}_4 = \emptyset$, то $\mathcal{C}_3 \neq \emptyset$, $|T| = |V(\mathcal{C}_3)|$ и

$$b|S| \leq a|T| - d_{G-S}(T) + bn - 1 = |T| + bn - 1.$$

Если $|I_3| = 1$, то $|T| \leq a - 1$, и в силу наблюдения 1 имеем

$$n + 1 \leq |S| \leq \frac{|T| + bn - 1}{b} \leq n + \frac{a - 2}{b},$$

противоречие. Следовательно, $|I_3| \geq 2$.

В таком случае $i(G - \Theta) \geq |I_3| \geq 2$, где $\Theta = S \cup N_G(I_3)$, и следуя рассуждениям в доказательстве утверждения 1, получаем

$$\begin{aligned} |S| &\leq \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{2b}\right)|I_{31}| + \frac{a - 1}{b}|I_{32}| - \frac{1}{b} + n < \frac{a|I_3|}{b} + n, \\ |\Theta| &\leq \left(a - 1 + \frac{a - 1}{b}\right)|I_3| + n - \frac{1}{b} \leq \left(a - 1 + \frac{a}{b}\right)|I_3| + n - \frac{3}{b}. \end{aligned}$$

В силу наблюдения 1 получаем, что $|I_3| > \frac{b}{a}$, т.е. $|I_3| \geq n_{a,b}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} I'(G) &\leq \frac{|\Theta|}{i(G - \Theta) - 1} \leq \frac{\left\lfloor \left(a - 1 + \frac{a}{b}\right)|I_3| + n - \frac{3}{b} \right\rfloor}{|I_3| - 1} = \\ &= a - 1 + \frac{n + a - 1 + \left\lfloor \frac{a|I_3| - 3}{b} \right\rfloor}{|I_3| - 1}. \end{aligned}$$

Пусть $a|I_3| - 3 = n_5b + \varepsilon_5$, где $n_5 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\varepsilon_5 \in \{0, 1, \dots, b - 1\}$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \max \left\{ \frac{\left\lfloor \frac{a|I_3| - 3}{b} \right\rfloor + n + a - 1}{|I_3| - 1} \right\} &= \max \left\{ \frac{\frac{a|I_3| - 3 - \varepsilon_5}{b} + n + a - 1}{|I_3| - 1} \right\} = \\ &= \frac{a}{b} + \max \left\{ \frac{n + a - 1 + \frac{a - 3 - \varepsilon_5}{b}}{|I_3| - 1} \right\}. \end{aligned}$$

Так как

$$n + a - 1 + \frac{a - 3 - \varepsilon_5}{b} > 0,$$

то величина

$$\frac{n + a - 1 + \left\lfloor \frac{a|I_3| - 3}{b} \right\rfloor}{|I_3| - 1}$$

принимает максимальное значение, когда $|I_3|$ достигает своей нижней границы $n_{a,b}$. Получаем

$$\begin{aligned} I'(G) &\leq a - 1 + \frac{\left\lfloor \frac{an_{a,b} - 3}{b} \right\rfloor + n + a - 1}{n_{a,b} - 1} \leq \\ &\leq a - 1 + \frac{\left\lfloor \frac{an_{a,b} - 3}{(n_{a,b} - 1)a} \right\rfloor + n + a - 1}{n_{a,b} - 1} \leq a - 1 + \frac{n + a}{n_{a,b} - 1}, \end{aligned}$$

что противоречит условию на вариант изолированной жесткости. $\blacktriangle$

Утверждение 4. Если $\ell_1 + \ell_2 = 0$, то $\mathcal{C}_3 \neq \emptyset$.

Доказательство. Если $\mathcal{C}_3 = \emptyset$, то $\mathcal{C}_4 \neq \emptyset$ и $a \geq 3$.

Если $|I_4| = 1$, положим

$$d_{\min} = \min\{d_{G-S}(v) \mid v \in \mathcal{C}_4\},$$

и пусть $z \in V(\mathcal{C}_4)$ такова, что $d_{G-S}(z) = d_{\min}$, здесь $d_{\min} \in \{1, \dots, a - 2\}$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} b|S| &\leq a|T| - d_{G-S}(T) + bn - 1 \leq |T|(a - d_{\min}) + bn - 1, \\ |S| &\leq \frac{|T|(a - d_{\min}) + bn - 1}{b} \leq \frac{(a - 1)(a - d_{\min}) - 1}{b} + n \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} a + n &\leq \delta(G) \leq d_{\min} + |S| \leq d_{\min} + \frac{(a - 1)(a - d_{\min}) - 1}{b} + n = \\ &= \frac{a^2}{b} - \frac{a}{b} + \frac{(b - a + 1)d_{\min}}{b} - \frac{1}{b} + n \leq \frac{a^2}{b} - \frac{a}{b} + \frac{(b - a + 1)(a - 2)}{b} - \frac{1}{b} + n = \\ &= a - 2 + n + \frac{2a - 3}{b}, \end{aligned}$$

противоречие.

Следовательно, $|I_4| \geq 2$. Пусть $v_1, v_2, \dots, v_{|I_4|}$ – вершины из I_4 , определяемые как в доказательстве утверждения 2, т.е. $d_{G-S}(v_1) \leq a - 2$ и

$$d_{G-S}(v_1) \leq d_{G-S}(v_2) \leq \dots \leq d_{G-S}(v_{|I_4|}).$$

Имеем $|T| = |V(\mathcal{C}_4)|$,

$$b|S| \leq a|T| - d_{G-S}(T) + bn - 1 \leq \sum_{i=1}^{|I_4|} (d_{G-S}(v_i) + 1)(a - d_{G-S}(v_i)) + bn - 1$$

и

$$|S| \leq \frac{\sum_{i=1}^{|I_4|} (d_{G-S}(v_i) + 1)(a - d_{G-S}(v_i))}{b} + n - \frac{1}{b}.$$

Значит, $i(G - \Theta) \geq |I_4| \geq 2$, где $\Theta = S \cup N_{G-S}(I_4)$, и в силу рассуждений в доказательстве утверждения 2 получаем

$$|\Theta| \leq |S| + |N_{G-S}(I_4)| \leq \left(a - 1 + \frac{a}{b}\right)|I_4| + n - 1 + \frac{a - 3}{b}.$$

При максимизации $|\Theta|$ только одна вершина из I_4 имеет степень $a - 2$ в $G - S$, а остальные имеют степень $a - 1$ в $G - S$. Чтобы оценить $|I_4|$, перепишем оценку сверху для $|S|$ в виде

$$\begin{aligned} |S| &\leq \frac{(|I_4| - 1)(a - 1 + 1)(a - (a - 1)) + (a - 2 + 1)(a - (a - 2))}{b} + n - \frac{1}{b} \leq \\ &\leq \frac{a|I_4| + a - 3}{b} + n. \end{aligned}$$

С учетом наблюдения 2 получаем

$$2 + n \leq |S| \leq \frac{a|I_4| + a - 3}{b} + n,$$

откуда

$$|I_4| \geq \frac{2b - a + 3}{a} \geq \frac{2(n_{a,b} - 1)a - a + 3}{a} = 2n_{a,b} - 3 + \frac{3}{a},$$

т.е. $|I_4| \geq 2n_{a,b} - 2$.

Действуя тем же способом, что и выше, получаем

$$\begin{aligned} I'(G) &\leq \frac{|\Theta|}{i(G - \Theta) - 1} \leq \frac{\left\lfloor \left(a - 1 + \frac{a}{b}\right)|I_4| + n - 1 + \frac{a - 3}{b} \right\rfloor}{|I_4| - 1} = \\ &= a - 1 + \frac{n + a - 2 + \left\lfloor \frac{a|I_4| + a - 3}{b} \right\rfloor}{|I_4| - 1}. \end{aligned}$$

Пусть $a|I_4| + a - 3 = n_6b + \varepsilon_6$, где $n_6 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\varepsilon_6 \in \{0, 1, \dots, b - 1\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \max \left\{ \frac{n + a - 2 + \left\lfloor \frac{a|I_4| + a - 3}{b} \right\rfloor}{|I_4| - 1} \right\} &= \max \left\{ \frac{n + a - 2 + \frac{a|I_4| + a - 3 - \varepsilon_6}{b}}{|I_4| - 1} \right\} = \\ &= \frac{a}{b} + \max \left\{ \frac{n + a - 2 + \frac{2a - 3 - \varepsilon_6}{b}}{|I_4| - 1} \right\}. \end{aligned}$$

Так как

$$n + a - 2 + \frac{2a - 3 - \varepsilon_6}{b} > 0,$$

то величина

$$\frac{n + a - 2 + \left\lfloor \frac{a|I_4| + a - 3}{b} \right\rfloor}{|I_4| - 1}$$

принимает свое максимальное значение, когда $|I_4|$ достигает своей нижней границы $2n_{a,b} - 2$. Получаем

$$\begin{aligned} I'(G) &\leq a - 1 + \frac{n + a - 2 + \left\lfloor \frac{a(2n_{a,b} - 2) + a - 3}{b} \right\rfloor}{2n_{a,b} - 2 - 1} \leq \\ &\leq a - 1 + \frac{n + a - 2 + \left\lfloor \frac{a(2n_{a,b} - 2) + a - 3}{(n_{a,b} - 1)a} \right\rfloor}{2n_{a,b} - 3} = a - 1 + \frac{n + a}{2n_{a,b} - 3}, \end{aligned}$$

что противоречит условиям

$$I'(G) > a - 1 + \frac{n + a}{n_{a,b} - 1}$$

и $n_{a,b} \geq 2$. $\blacktriangle$

Итак, в силу утверждений 3, 4 имеем

$$\mathcal{C}_3 \neq \emptyset, \quad \mathcal{C}_4 \neq \emptyset, \quad a \geq 3, \quad i(G - \Theta) \geq 2,$$

где

$$\Theta = S \cup N_{G-S}(I_3) \cup N_{G-S}(I_4),$$

и

$$\begin{aligned} |\Theta| &\leq |S| + |N_{G-S}(I_3)| + |N_{G-S}(I_4)| \\ &\leq \left(a - 1 + \frac{a - 1}{b}\right)|I_3| + \left(a - 1 + \frac{a}{b}\right)|I_4| + n - 1 + \frac{a - 3}{b} \\ &\leq \left(a - 1 + \frac{a}{b}\right)(|I_3| + |I_4|) + n - 1 + \frac{a - 4}{b}. \end{aligned}$$

Рассуждениями, аналогичными случаю 1, убеждаемся, что

$$|I_3| + |I_4| \geq 2n_{a,b} - 2,$$

используя наблюдение 2 и заново оценивая $|S|$ сверху.

Таким образом,

$$\begin{aligned} I'(G) &\leq \frac{|\Theta|}{i(G - \Theta) - 1} \leq \frac{\left\lfloor \left(a - 1 + \frac{a}{b}\right)(|I_3| + |I_4|) + n - 1 + \frac{a - 4}{b} \right\rfloor}{|I_3| + |I_4| - 1} = \\ &= a - 1 + \frac{n + a - 2 + \left\lfloor \frac{a(|I_3| + |I_4|) + a - 4}{b} \right\rfloor}{|I_3| + |I_4| - 1}. \end{aligned}$$

Пусть $a(|I_3| + |I_4|) + a - 4 = n_7b + \varepsilon_7$, где $n_7 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\varepsilon_7 \in \{0, 1, \dots, b - 1\}$. Тогда

$$\begin{aligned} &\max \left\{ \frac{n + a - 2 + \left\lfloor \frac{a(|I_3| + |I_4|) + a - 4}{b} \right\rfloor}{|I_3| + |I_4| - 1} \right\} = \\ &= \max \left\{ \frac{n + a - 2 + \frac{a(|I_3| + |I_4|) + a - 4 - \varepsilon_7}{b}}{|I_3| + |I_4| - 1} \right\} = \\ &= \frac{a}{b} + \max \left\{ \frac{n + a - 2 + \frac{2a - 4 - \varepsilon_7}{b}}{|I_3| + |I_4| - 1} \right\}. \end{aligned}$$

Так как

$$n + a - 2 + \frac{2a - 4 - \varepsilon_7}{b} > 0,$$

то величина

$$\frac{n + a - 2 + \left\lfloor \frac{a(|I_3| + |I_4|) + a - 4}{b} \right\rfloor}{|I_3| + |I_4| - 1}$$

принимает максимальное значение, когда $|I_3| + |I_4|$ достигает своей нижней границы $2n_{a,b} - 2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} I'(G) &\leq a - 1 + \frac{n + a - 2 + \left\lfloor \frac{a(2n_{a,b} - 2) + a - 4}{b} \right\rfloor}{2n_{a,b} - 2 - 1} \leq \\ &\leq a - 1 + \frac{n + a - 2 + \left\lfloor \frac{a(2n_{a,b} - 2) + a - 4}{(n_{a,b} - 1)a} \right\rfloor}{2n_{a,b} - 3} \leq a - 1 + \frac{n + a}{2n_{a,b} - 3}, \end{aligned}$$

что противоречит условиям

$$I'(G) > a - 1 + \frac{n + a}{n_{a,b} - 1}$$

и $n_{a,b} \geq 2$.

Итак, на этом доказательство теоремы 1 завершается.

§ 4. Заключение и направления дальнейшей работы

В статье рассмотрена возможность передачи данных в подвергающейся атакам сети с точки зрения модели дробных критических графов, которая связана с вариантом изолированной жесткости, измеряющим уязвимость сетей. Получена точная граница на вариант изолированной жесткости для дробного (a, b, n) -критического графа, обеспечивающая оптимальный баланс между производительностью сети и ее стоимостью и являющаяся теоретической основой для проектирования топологии сети. Кроме того, полученный вывод позволяет анализировать возможность передачи данных при повреждении узлов в сети в результате атаки.

Тем не менее, данная статья содержит только теоретический анализ и не моделирует реальные сети, которые хотелось бы изучить в будущем. Ниже перечислены наиболее интересные на наш взгляд темы, требующие дальнейшего изучения.

- Дробный фактор моделирует только синхронную передачу данных. Однако в реальных сетях при передаче данных часто возникают задержки. То, как можно охарактеризовать задержку в модели сетевых графов, еще подлежит тщательному изучению.
- Каждый узел в сети имеет свой собственный статус и отдельную функцию, поэтому для описания объема памяти всех узлов не может использоваться единый интервал $[a, b]$. Таким образом, в будущих исследованиях следует заменить дробный $[a, b]$ -фактор на дробный (g, f) -фактор. Соответственно, возможность передачи данных должна исследоваться в более широких контекстах.
- В работе [11] введен нечеткий дробный коэффициент в нечетких графах, который позволяет работать с сетями, содержащими неопределенную информацию. Однако в этой работе не было четко сформулировано, как количественно оценивать неопределенность (т.е. как строить функцию принадлежности в сетях передачи данных). Создается впечатление, что существует большой разрыв между

теоретическим анализом и реальными приложениями. Необходимо ввести разумные правила для количественной оценки параметров неопределенности каналов и узлов, таких как коэффициент использования, пропускная способность восходящего и нисходящего каналов, время задержки, качество входа в канал и т.д.

- В теореме 1 для заключения требуются условия как на $\delta(G)$, так и на $I'(G)$, причем $a + n$ является минимальной нижней границей на $\delta(G)$. Если повышать нижнюю границу на $\delta(G)$, то можно ли при этом уменьшить нижнюю границу на $I'(G)$? Если ответ на этот вопрос положительный, то мы получим множество оптимальных решений для $\delta(G)$ и $I'(G)$, что является аналогом фронта Парето в задачах многоцелевой оптимизации (МО). Однако в этих обстоятельствах решение проектировщика сети может стать фатальным, и необходимо находить точку равновесия между $\delta(G)$ и $I'(G)$, аналогичную точке загиба в МО.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов при публикации данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhou S., Liu H., Xu Y. A Note on Fractional ID-[a, b]-Factor-Critical Covered Graphs // Discrete Appl. Math. 2022. V. 319. P. 511–516. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2021.03.004>
2. Zhou S., Wu J., Bian Q. On Path-Factor Critical Deleted (or Covered) Graphs // Aequationes Math. 2022. V. 96. № 4. P. 795–802. <https://doi.org/10.1007/s00010-021-00852-4>
3. Zhou S., Wu J., Liu H. Independence Number and Connectivity for Fractional (a, b, k)-Critical Covered Graphs // RAIRO Oper. Res. 2022. V. 56. № 4. P. 2535–2542. <https://doi.org/10.1051/ro/2022119>
4. Gao W., Wang W. New Isolated Toughness Condition for Fractional (g, f, n)-Critical Graphs // Colloq. Math. 2017. V. 147. P. 55–66. <https://doi.org/10.4064/cm6713-8-2016>
5. Woodall D. The Binding Number of a Graph and Its Anderson Number // J. Combin. Theory Ser. B. 1973. V. 15. № 3. P. 225–255. [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(73\)90038-5](https://doi.org/10.1016/0095-8956(73)90038-5)
6. Chvátal V. Tough Graphs and Hamiltonian Circuits // Discrete Math. 1973. V. 5. № 3. P. 215–228. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(73\)90138-6](https://doi.org/10.1016/0012-365X(73)90138-6)
7. Enomoto H. Toughness and the Existence of k -Factors. III // Discrete Math. 1998. V. 189. № 1–3. P. 277–282. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(98\)00059-4](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(98)00059-4)
8. Yang J., Ma Y., Liu G. Fractional (g, f)-Factors of Graphs // Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. A (Chinese) 2001. V. 16. № 4. P. 385–390.
9. Ma Y., Liu G. Isolated Toughness and the Existence of Fractional Factors // Acta Math. Appl. Sin. (Chinese). 2003. V. 26. № 1. P. 133–140.
10. He Z., Liang L., Gao W. Isolated Toughness Variant and Fractional k -Factor // RAIRO Oper. Res. 2022. V. 56. № 5. P. 3675–3688. <https://doi.org/10.1051/ro/2022177>
11. Gao W., Wang W., Zheng L. Fuzzy Fractional Factors in Fuzzy Graphs // Int. J. Intell. Syst. 2022. V. 37. № 11. P. 9886–9903. <https://doi.org/10.1002/int.23019>
12. Gao W., Wang W., Chen Y. Tight Isolated Toughness Bound for Fractional (k, n)-Critical Graphs // Discrete Appl. Math. 2022. V. 322. P. 194–202. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2022.08.028>
13. Zhou S. A Neighborhood Union Condition for Fractional (a, b, k)-Critical Covered Graphs // Discrete Appl. Math. 2022. V. 323. P. 343–348. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2021.05.022>
14. Zhang W., Wang S. Discussion on Fractional (a, b, k)-Critical Covered Graphs // Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser. 2022. V. 38. № 2. P. 304–311. <https://doi.org/10.1007/s10255-022-1076-6>
15. Gao W., Wang W., Chen Y. Isolated Toughness and Fractional (a, b, n)-Critical Graphs // Connect. Sci. 2023. V. 35. № 1. Article 2181482 (15 pp.). <https://doi.org/10.1080/09540091.2023.2181482>

16. *Bondy J.A., Murty U.S.R.* Graph Theory. Berlin: Springer, 2008.
17. *Liu S.* On Toughness and Fractional (g, f, n) -Critical Graphs // Inform. Process Lett. 2010. V. 110. № 10. P. 378–382. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2010.03.005>

Gao Вэй[✉] (Gao Wei)

Школа информатики и технологии,
Юньнаньский нормальный университет, Куньмин, Китай
[✉]gaowei@ynnu.edu.cn

Баşкonusи Хаджи Мехмет (Başkonuş, Hacı Mehmet)
Факультет математического и естественнонаучного
образования, Университет Харрана, Шанлыурфа, Турция
hmbaskonus@gmail.com

Каттани Карло (Cattani, Carlo)
Инженерная школа, Университет Тусции, Витербо, Италия
cattani@unitus.it

Поступила в редакцию

16.01.2023

После доработки

16.07.2023

Принята к публикации

02.08.2023