

УДК 621.391 : 519.72

© 2024 г. Х. Гутьеррес-Гутьеррес, И. Барасоайн-Эчепаре,
М. Саррага-Родригес, Ш. Инсаusti

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ПРЕДЕЛОВ СЖАТИЯ ДАННЫХ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ИСТОЧНИКОВ ВЕКТОРНЫХ ПРОЦЕССОВ АВТОРЕГРЕССИИ СО СКОЛЬЗЯЩИМ СРЕДНИМ¹

Для определенных нестационарных источников вещественных гауссовских векторных процессов авторегрессии со скользящим средним (ARMA-процессов) вычисляются скорость создания дифференциальной энтропии и скорость как функция искажения.

Ключевые слова: векторная авторегрессия со скользящим средним (ARMA), сжатие данных, скорость создания дифференциальной энтропии, скорость как функция искажения.

DOI: 10.31857/S0555292324010029, EDN: OZSXLJ

§ 1. Введение

В работе [1] Шеннон ввел два фундаментальных предела (термин, предложенный Вайнером в [2]) для сжатия данных: энтропия источника (аналогом которой для непрерывных источников является скорость создания дифференциальной энтропии [3]) и скорость как функция искажения. Однако для векторных источников в литературе было получено очень мало выражений в замкнутом виде для этих фундаментальных пределов. Наиболее примечательным исключением является замкнутое выражение, полученное Томсом и Бергером в [4] для некоторых нестационарных вещественных гауссовских векторных источников с авторегрессией. В настоящей статье мы распространим их результат на векторные ARMA-источники. Мы также получим выражение в замкнутом виде для скорости создания дифференциальной энтропии таких векторных ARMA-источников. Для вычисления этих двух величин мы сперва докажем два новых математических результата, касающихся автокорреляционных матриц векторных ARMA-процессов. Хотя в литературе существуют и другие теоремы об автокорреляционных матрицах векторных ARMA-процессов (см., например, [5]), их условия трудно проверяемы на практике. Основное преимущество наших новых результатов заключается в том, что их условия легко проверить с помощью хорошо известных численных методов.

Дальнейшая часть статьи имеет следующую структуру. В § 2 получены два новых результата о векторных ARMA-процессах. В § 3 эти результаты применяются для вычисления двух фундаментальных пределов сжатия данных для некоторых нестационарных векторных ARMA-источников.

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства науки и инноваций Испании в рамках проекта MADDIE (номер проекта PID2022-137099NB-C44).

§ 2. Два новых результата о векторных ARMA-процессах

2.1. Обозначения и определения. В этом пункте приведем обозначения для блочно-теплицевых матриц, которые будут использоваться далее по всей статье, а также напомним три известных определения, касающиеся стохастических векторных процессов.

Для непрерывной 2π -периодической функции

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$$

через $T_n(F)$ обозначим блочно-теплицеву матрицу с $n \times n$ блоками размера $N \times N$ вида

$$[T_n(F)]_{j,k} = F_{j-k}, \quad j, k \in \{1, \dots, n\},$$

где $\{F_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – последовательность коэффициентов Фурье функции F . Если F имеет вид

$$F(\omega) = I_N + \sum_{k=1}^p e^{-k\omega i} F_{-k}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

для некоторого $p \in \mathbb{N}$, то через $\Psi_p(F)$ обозначается ее сопровождающая матрица

$$\Psi_p(F) = \left(\begin{array}{ccc|c} -F_{-1} & \dots & -F_{-(p-1)} & -F_{-p} \\ \hline I_{(p-1)N} & & & 0_{(p-1)N \times N} \end{array} \right),$$

где I_m – единичная матрица размера $m \times m$, а $0_{m \times n}$ – нулевая матрица размера $m \times n$.

Всюду далее для матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ через $\rho(A)$ будем обозначать ее спектральный радиус (т.е. максимальный модуль ее собственных значений), а через $\sigma_1(A)$ и $\sigma_n(A)$ – ее наибольшее и наименьшее сингулярные числа соответственно. Если матрица A эрмитова, то через $\lambda_1(A)$ и $\lambda_n(A)$ будем обозначать ее наибольшее и наименьшее собственные значения соответственно.

Теперь напомним понятие асимптотически стационарного процесса в широком смысле (AWSS-процесса), введенное для скалярных процессов в [6, с. 225] и обобщенное на векторные процессы в [7, определение 7.1 и теорема 4.3].

Определение 1. Пусть функция $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$ непрерывна и 2π -периодична. Случайный N -мерный процесс $\{x_n\}$ называется AWSS-процессом с (асимптотической) спектральной плотностью мощности (СПМ) X , если он имеет постоянное среднее, множество $\{\|\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^*)\|_2\}$ ограничено и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^*) - T_n(X)\|_F}{\sqrt{n}} = 0, \quad (1)$$

где

$$x_{n:1} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

через $*$ обозначено эрмитово сопряжение, $\mathbf{E}$ – математическое ожидание, $\|\cdot\|_2$ – спектральная норма, а $\|\cdot\|_F$ – норма Фробениуса.

Следует отметить, что векторный WSS-процесс $\{x_n\}$ с непрерывной СПМ X является AWSS-процессом с СПМ X , поскольку в силу того, что

$$\{\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^*)\} = \{T_n(X)\},$$

равенство (1) выполняется и $\{\|\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^*)\|_2\}$ ограничено (см., например, [7, теорема 4.3]).

Теперь напомним понятие (одностороннего) векторного ARMA-процесса.

Определение 2. ARMA-процессом называется N -мерный процесс $\{x_n\}$ с нулевым средним, такой что

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1} B_{-k} w_{n-k} - \sum_{\ell=1}^{n-1} A_{-\ell} x_{n-\ell}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} A_{-\ell} &\in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}, \\ B_{-k} &\in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned}$$

а $\{w_n\}$ – N -мерный процесс с нулевым средним с

$$\mathbf{E}(w_j w_h^*) = \delta_{j,h} W, \quad \forall j, h \in \mathbb{N},$$

где δ – символ Кронекера, а W – положительно определенная матрица размера $N \times N$ (т.е. процесс $\{w_n\}$ – векторный белый шум).

Если $\det(B_0) \neq 0$, то без ограничения общности можно считать, что $B_0 = I_N$ (см. Приложение А). Этот факт хорошо известен в скалярном случае, т.е. для $N = 1$ (см., например, [8]).

Заметим, что уравнение (2) можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_{-k} x_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} B_{-k} w_{n-k}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

где $A_0 = I_N$. Предположим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A_{-k}\|_F < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \|B_{-k}\|_F < \infty,$$

тогда из [7, Приложение В] получаем, что

$$T_n(A)x_{n:1} = T_n(B)w_{n:1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

где

$$A(\omega) = I_N + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\omega i} A_{-k}$$

и

$$B(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\omega i} B_{-k}$$

для всех $\omega \in \mathbb{R}$. Таким образом, $\{\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^*)\}$ можно выразить через блочно-теплицевы матрицы как

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^*)\} &= \{(T_n(A))^{-1}T_n(A)\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^*)(T_n(A))^*((T_n(A))^*)^{-1}\} = \\
&= \{(T_n(A))^{-1}\mathbf{E}(T_n(A)x_{n:1}x_{n:1}^*(T_n(A))^*((T_n(A))^*)^{-1}\} = \\
&= \{(T_n(A))^{-1}\mathbf{E}(T_n(A)x_{n:1}(T_n(A)x_{n:1})^*((T_n(A))^*)^{-1}\} = \\
&= \{(T_n(A))^{-1}\mathbf{E}(T_n(B)w_{n:1}(T_n(B)w_{n:1})^*((T_n(A))^*)^{-1}\} = \\
&= \{(T_n(A))^{-1}\mathbf{E}(T_n(B)w_{n:1}w_{n:1}^*(T_n(B))^*((T_n(A))^*)^{-1}\} = \\
&= \{(T_n(A))^{-1}T_n(B)\mathbf{E}(w_{n:1}w_{n:1}^*)(T_n(B))^*((T_n(A))^*)^{-1}\} = \\
&= \{(T_n(A))^{-1}T_n(B)T_n(W)(T_n(B))^*((T_n(A))^{-1})^*\}, \tag{3}
\end{aligned}$$

поскольку

$$\det(T_n(A)) = 1 \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Следует отметить, что блочно-теплицева матрица $T_n(W)$ является блочно-диагональной матрицей с блоками размера $N \times N$ на главной диагонали, равными W . Если $N = 1$, то W – дисперсия шума, обычно обозначаемая через σ^2 .

Теперь можно напомнить понятие векторного ARMA(p, q)-процесса.

Определение 3. Пусть процесс $\{x_n\}$ такой, как в определении 2, где $B_0 = I_N$. Если существуют $p, q \in \mathbb{N}$, такие что

$$A_{-\ell} = 0_{N \times N}, \quad \forall \ell > p$$

и

$$B_{-k} = 0_{N \times N}, \quad \forall k > q,$$

то $\{x_n\}$ называется векторным ARMA(p, q)-процессом. Заметим, что последовательность его автокорреляционных матриц $\{\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^*)\}$ задается уравнением (3), где

$$A(\omega) = I_N + \sum_{k=1}^p e^{-k\omega i} A_{-k}$$

и

$$B(\omega) = I_N + \sum_{k=1}^q e^{-k\omega i} B_{-k}.$$

Скалярные ARMA(p, q)-модели часто используются в сжатии сигналов (см., например, [9]).

2.2. Об автокорреляционных матрицах некоторых векторных ARMA-процессов.

Первый из наших результатов дает достаточное условие, при котором векторный ARMA(p, q)-процесс является AWSS-процессом.

Теорема 1. Пусть $\{x_n\}$ – процесс из определения 3. Если $\rho(\Psi_p(A)) < 1$, то

1. Множество $\{\|\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^*) - T_n(X)\|_F\}$, где

$$X(\omega) = (A(\omega))^{-1}B(\omega)W(B(\omega))^*((A(\omega))^{-1})^*$$

для всех $\omega \in \mathbb{R}$, ограничено;

2. $\{x_n\}$ является AWSS-процессом с СПМ X .

Доказательство. 1. Так как $\rho(\Psi_p(A)) < 1$, то в силу [10, теорема 6] имеем $\det(A(\omega)) \neq 0$ для всех $\omega \in \mathbb{R}$, и множество $\{\|(T_n(A))^{-1}\|_2\}$ ограничено. Из (3) и [7, лемма 4.2] получаем

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^*) - T_n(A^{-1}BW B^*(A^{-1})^*)\|_F = \\
& = \|(T_n(A))^{-1}T_n(B)T_n(W)(T_n(B))^*((T_n(A))^{-1})^* - T_n(A^{-1}BW B^*(A^{-1})^*)\|_F \leq \\
& \leq \|(T_n(A))^{-1}\|_2 \times \\
& \times \|T_n(B)T_n(W)(T_n(B))^*((T_n(A))^{-1})^* - T_n(A)T_n(A^{-1}BW B^*(A^{-1})^*)\|_F \leq \\
& \leq \|(T_n(A))^{-1}\|_2 \left(\|T_n(BW)(T_n(B))^*((T_n(A))^*)^{-1} - T_n(BWB^*(A^{-1})^*)\|_F + \right. \\
& + \|T_n(BWB^*(A^{-1})^*) - T_n(A)T_n(A^{-1}BW B^*(A^{-1})^*)\|_F \Big) \leq \|(T_n(A))^{-1}\|_2 \times \\
& \times \left(\|((T_n(A))^*)^{-1}\|_2 \|T_n(BW)(T_n(B))^* - T_n(BWB^*(A^*)^{-1})(T_n(A))^*\|_F + \right. \\
& + \|T_n(BWB^*(A^{-1})^*) - T_n(A)T_n(A^{-1}BW B^*(A^{-1})^*)\|_F \Big) \leq \\
& \leq \|(T_n(A))^{-1}\|_2 \left(\|((T_n(A))^{-1})^*\|_2 \left(\|T_n(BW)T_n(B^*) - T_n(BWB^*)\|_F + \right. \right. \\
& + \|T_n(BWB^*) - T_n(BWB^*(A^*)^{-1})T_n(A^*)\|_F \Big) + \\
& + \|T_n(BWB^*(A^{-1})^*) - T_n(A)T_n(A^{-1}BW B^*(A^{-1})^*)\|_F \Big) = \\
& = \|(T_n(A))^{-1}\|_2 \left(\|(T_n(A))^{-1}\|_2 \left(\|T_n(BW)T_n(B^*) - T_n(BWB^*)\|_F + \right. \right. \\
& + \|T_n(BWB^*(A^*)^{-1})T_n(A^*) - T_n(BWB^*(A^*)^{-1}A^*)\|_F \Big) + \\
& + \|T_n(A)T_n(A^{-1}BW B^*(A^{-1})^*) - T_n(AA^{-1}BW B^*(A^{-1})^*)\|_F \Big)
\end{aligned}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Для завершения доказательства остается показать, что множества

$$\begin{aligned}
& \left\{ \|T_n(BW)T_n(B^*) - T_n(BWB^*)\|_F \right\}, \\
& \left\{ \|T_n(BWB^*(A^*)^{-1})T_n(A^*) - T_n(BWB^*(A^*)^{-1}A^*)\|_F \right\}, \\
& \left\{ \|T_n(A)T_n(A^{-1}BW B^*(A^{-1})^*) - T_n(AA^{-1}BW B^*(A^{-1})^*)\|_F \right\}
\end{aligned}$$

ограничены. Это следует из [11, лемма 2] и того факта, что A , A^* и B^* – тригонометрические многочлены.

2. Это является прямым следствием утверждения 1 и [10, теорема 8]. $\blacktriangle$

В теореме 1 мы доказали, что $\rho(\Psi_p(A)) < 1$ является достаточным условием для того, чтобы векторный ARMA(p, q)-процесс был AWSS-процессом. В [5, теорема 8] было получено другое достаточное условие, а именно:

$$\inf_{\omega \in [0, 2\pi]} \lambda_N((A(\omega))^* A(\omega)) > 0 \quad \text{и} \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} \sigma_{nN}(T_n(A)) > 0.$$

В Приложении В мы покажем, что эти условия равносильны. Однако основным преимуществом нового условия $\rho(\Psi_p(A)) < 1$ является то, что его выполнение легко проверять, используя, например, степенной метод – классический численный метод для нахождения спектрального радиуса матрицы. Напротив того, проверка условия

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \sigma_{nN}(T_n(A)) > 0,$$

приведенного в [5, теорема 8], представляет собой в общем случае трудноразрешимую задачу, поскольку для этого требуется вычислить наименьшее сингулярное чис-

ло бесконечного количества матриц. Кроме того, в теореме 1 мы также установили, что скорость сходимости последовательности

$$\left\{ \frac{\|\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^*) - T_n(X)\|_F}{\sqrt{n}} \right\}$$

равна $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Наш второй результат касается собственных значений автокорреляционных матриц некоторых векторных ARMA(p, q)-процессов.

Теорема 2. Пусть $\{x_n\}$ – процесс из определения 3.

1. Если $\rho(\Psi_p(A)) < 1$, то

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \lambda_1(\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^*)) < \infty;$$

2. Если $\rho(\Psi_q(B)) < 1$, то

$$0 < \inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda_{nN}(\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^*)).$$

Доказательство. 1. По теореме 1 процесс $\{x_n\}$ является AWSS-процессом, и следовательно, множество $\{\|\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^*)\|_2\}$ ограничено. Так как $\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^*)$ положительно полуопределена для всех $n \in \mathbb{N}$, то

$$\|\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^*)\|_2 = \lambda_1(\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^*))$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

2. Согласно [10, теорема 6] множество $\{\|(T_n(B))^{-1}\|_2\}$ ограничено. Применяя равенство (3) и [7, теорема 4.3], получаем

$$\begin{aligned} \lambda_{nN}(\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^*)) &= \sigma_{nN}(\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^*)) = \\ &= \frac{1}{\sigma_1((\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^*))^{-1})} = \frac{1}{\|(\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^*))^{-1}\|_2} = \\ &= \frac{1}{\|(T_n(A))^*((T_n(B))^*)^{-1}(T_n(W))^{-1}(T_n(B))^{-1}T_n(A)\|_2} \geq \\ &\geq \frac{1}{\|(T_n(A))^*\|_2 \|((T_n(B))^{-1})^*\|_2 \|(T_n(W))^{-1}\|_2 \|(T_n(B))^{-1}\|_2 \|T_n(A)\|_2} = \\ &= \frac{1}{\|T_n(A)\|_2^2 \|(T_n(B))^{-1}\|_2^2 \|T_n(W^{-1})\|_2} = \\ &= \frac{1}{\|T_n(A)\|_2^2 \|(T_n(B))^{-1}\|_2^2 \|W^{-1}\|_2} = \\ &= \frac{\lambda_N(W)}{\|T_n(A)\|_2^2 \|(T_n(B))^{-1}\|_2^2} \geq \\ &\geq \frac{\lambda_N(W)}{\left(\sup_{m \in \mathbb{N}} \|T_m(A)\|_2\right)^2 \left(\sup_{m \in \mathbb{N}} \|(T_m(B))^{-1}\|_2\right)^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda_{nN}(\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^*)) \geq \frac{\lambda_N(W)}{\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(A)\|_2\right)^2 \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \|(T_n(B))^{-1}\|_2\right)^2} > 0. \quad \blacktriangle$$

§ 3. Вычисление двух фундаментальных пределов теории информации для некоторых нестационарных векторных ARMA-источников

В работе [1] Шеннон ввел три фундаментальных предела (термин, предложенный Вайнером в [2]) теории информации: энтропия источника (для непрерывных источников названная в [3] скоростью создания дифференциальной энтропии), скорость как функция искажения и пропускная способность канала. Первые два относятся к сжатию данных, а третий – к передаче информации. Используя математические результаты, полученные в предыдущем параграфе, мы теперь вычислим два фундаментальных предела сжатия данных для некоторых определенных нестационарных векторных ARMA-источников.

3.1. Скорость создания дифференциальной энтропии. Формула для скорости создания дифференциальной энтропии вещественного стационарного гауссовского скалярного источника была получена Колмогоровым в [12, формула (16)]. Мы обобщим эту формулу на случай вещественных гауссовских векторных AWSS-источников.

Теорема 3. Пусть $\{x_n\}$ – N -мерный AWSS-процесс с СПМ X . Предположим, что $\{x_n\}$ – вещественный гауссовский процесс с нулевым средним. Тогда если

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda_{nN}(\mathbf{E}(x_{n:1} x_{n:1}^\top)) > 0,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h(x_{n:1}) = \frac{N}{2} \ln(2\pi e) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln(\det(X(\omega))) d\omega,$$

где $^\top$ обозначает транспонирование, а через h обозначена дифференциальная энтропия (в натуральных единицах).

Доказательство. Согласно [3, формула (8.44)] дифференциальная энтропия (в натуральных единицах) вещественного гауссовского векторного процесса $x_{n:1}$ с нулевым средним имеет вид

$$h(x_{n:1}) = \frac{1}{2} \ln \left((2\pi e)^{nN} \det(\mathbf{E}(x_{n:1} x_{n:1}^\top)) \right)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, применяя [7, теорема 6.6] и [13, предложение 2], имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h(x_{n:1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \ln \left((2\pi e)^{nN} \det(\mathbf{E}(x_{n:1} x_{n:1}^\top)) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \left(\ln(2\pi e)^{nN} + \ln(\det(\mathbf{E}(x_{n:1} x_{n:1}^\top))) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{N}{2} \ln(2\pi e) + \frac{1}{2n} \ln(\det(\mathbf{E}(x_{n:1} x_{n:1}^\top))) \right) = \\ &= \frac{N}{2} \ln(2\pi e) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \ln(\det(\mathbf{E}(x_{n:1} x_{n:1}^\top))) = \\ &= \frac{N}{2} \ln(2\pi e) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \ln \left(\prod_{k=1}^{nN} \lambda_k(\mathbf{E}(x_{n:1} x_{n:1}^\top)) \right) = \\ &= \frac{N}{2} \ln(2\pi e) + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{nN} \ln(\lambda_k(\mathbf{E}(x_{n:1} x_{n:1}^\top))) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{N}{2} \ln(2\pi e) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^N \ln(\lambda_k(X(\omega))) d\omega = \\
&= \frac{N}{2} \ln(2\pi e) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln(\det(X(\omega))) d\omega. \quad \blacktriangle
\end{aligned}$$

Теперь мы можем вычислить скорость создания дифференциальной энтропии для некоторых нестационарных векторных ARMA-источников.

Следствие 1. Пусть $\{x_n\}$ – процесс из определения 3. Предположим, что $\{x_n\}$ – вещественный гауссовский процесс. Если $\rho(\Psi_p(A)) < 1$ и $\rho(\Psi_q(B)) < 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h(x_{n:1}) = \frac{N}{2} \ln(2\pi e) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(\left| \frac{\det(B(\omega))}{\det(A(\omega))} \right|^2 \det(W) \right) d\omega.$$

Доказательство. Объединяя теоремы 1–3, получаем

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h(x_{n:1}) = \\
&= \frac{N}{2} \ln(2\pi e) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(\det((A(\omega))^{-1} B(\omega) W (B(\omega))^* ((A(\omega))^{-1})^*) \right) d\omega. \quad \blacktriangle
\end{aligned}$$

Заметим, что для векторных ARMA-источников условие

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda_{nN}(\mathbf{E}(x_{n:1} x_{n:1}^\top)) > 0$$

теоремы 3 заменено на условие, которое можно проверить: $\rho(\Psi_q(B)) < 1$. Теперь докажем, что для векторного WSS-источника с непрерывной СПМ X трудно проверяемое на практике условие теоремы 3 можно заменить на следующее:

$$\det(X(\omega)) \neq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Следствие 2. Пусть $\{x_n\}$ – N -мерный WSS-процесс с непрерывной СПМ X . Предположим, что $\{x_n\}$ – вещественный гауссовский процесс с нулевым средним. Если $\det(X(\omega)) \neq 0$ для всех $\omega \in \mathbb{R}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h(x_{n:1}) = \frac{N}{2} \ln(2\pi e) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln(\det(X(\omega))) d\omega. \quad (4)$$

Доказательство. Из [13, предложение 3] имеем, что $X(\omega)$ положительно полуопределена для всех $\omega \in \mathbb{R}$, и следовательно,

$$\lambda_N(X(\omega)) \geq 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Значит, так как

$$\det(X(\omega)) \neq 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

то

$$\lambda_N(X(\omega)) > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Отсюда, используя [13, предложение 3], получаем

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda_{nN}(\mathbf{E}(x_{n:1} x_{n:1}^\top)) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda_{nN}(T_n(X)) = \min_{\omega \in [0, 2\pi]} \lambda_N(X(\omega)) > 0.$$

Таким образом, применяя теорему 3, получаем равенство (4). $\blacktriangle$

Выбирая $N = 1$ в следствии 2, получаем формулу скорости создания дифференциальной энтропии (в натуральных единицах) для вещественного стационарного гауссовского скалярного источника с нулевым средним:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h(x_{n:1}) = \frac{1}{2} \ln(2\pi e) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln(X(\omega)) d\omega. \quad (5)$$

Доказательство формулы (5) приведено также в [6, с. 161–162], но, к сожалению, там оно содержит две ошибки. Поделив равенство (5) на $\ln 2$, приходим к формуле для скорости создания дифференциальной энтропии (в битах), полученной Колмогоровым (см. [3, формула (12.40)]):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h_2(x_{n:1}) = \frac{1}{2} \log_2(2\pi e) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \log_2(X(\omega)) d\omega, \quad (6)$$

где через h_2 обозначена дифференциальная энтропия в битах. Мы даем ссылку именно на книгу [3], поскольку оригинальная формула, приведенная Колмогоровым в [12, формула (16)], содержит ошибку. Отметим, что доказательство формулы (6) не содержится ни в [3], ни в [12].

3.2. Скорость как функция искажения. В [4, теорема 1] Томс и Бергер привели формулу скорости как функции искажения для некоторых нестационарных вещественных гауссовских векторных источников с авторегрессией, но доказательство этой формулы ими не приведено. Здесь мы обобщаем эту формулу на векторные ARMA-источники.

Теорема 4. Пусть $\{x_n\}$ – процесс из определения 3. Предположим, что $\{x_n\}$ – вещественный гауссовский процесс. Пусть

$$\rho(\Psi_p(A)) < 1$$

и

$$\det(B(\omega)) \neq 0 \quad \text{для всех } \omega \in \mathbb{R}.$$

Пусть

$$X(\omega) = (A(\omega))^{-1} B(\omega) W(B(\omega))^* ((A(\omega))^{-1})^*$$

для всех $\omega \in \mathbb{R}$. Если $D \in \left(0, \frac{\text{tr}(X_0)}{N}\right)$, то

$$R(D) = \frac{1}{4\pi N} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^N \max \left\{ 0, \ln \frac{\lambda_k(X(\omega))}{\theta} \right\} d\omega, \quad (7)$$

где θ – вещественное число, такое что

$$D = \frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^N \min \{ \theta, \lambda_k(X(\omega)) \} d\omega. \quad (8)$$

Доказательство. Применяя теорему 1, получаем, что $\{x_n\}$ – AWSS-процесс с СПМ X . Так как матрица $\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^\top)$ положительно полуопределена для всех $n \in \mathbb{N}$, из [13, предложение 2] следует, что $X(\omega)$ положительно полуопределена для всех $\omega \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\det(X(\omega)) = \left| \frac{\det(B(\omega))}{\det(A(\omega))} \right|^2 \det(W) \neq 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

и из равенства (3) получаем

$$\det(\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^\top)) = \left| \frac{\det(T_n(B))}{\det(T_n(A))} \right|^2 \det(T_n(W)) = (\det(W))^n \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Так как $\mathbf{E}(x_{n:1}x_{n:1}^\top)$ положительно определена для всех $n \in \mathbb{N}$ и $X(\omega)$ положительно определена для всех $\omega \in \mathbb{R}$, то из [14, теорема 1] следует равенство (7). $\blacktriangle$

Поскольку

$$\left\{ \lambda_k((X(\omega))^{-1}) : k \in \{1, \dots, N\} \right\} = \left\{ \frac{1}{\lambda_k(X(\omega))} : k \in \{1, \dots, N\} \right\}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

формулы (7) и (8) можно переписать в виде

$$R(D) = \frac{1}{4\pi N} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^N \max\{0, -\ln(\theta \lambda_k((X(\omega))^{-1}))\} d\omega$$

и

$$D = \frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^N \min\left\{ \theta, \frac{1}{\lambda_k((X(\omega))^{-1})} \right\} d\omega$$

соответственно. Выбирая $B(\omega) = I_N$, получаем формулу скорости как функции искажения для векторных источников с авторегрессией, приведенную Томсом и Бергером в [4, формулы (8), (9)]:

$$R(D) = \frac{1}{4\pi N} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^N \max\{0, -\ln(\theta \lambda_k((A(\omega))^* W^{-1} A(\omega)))\} d\omega$$

и

$$D = \frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^N \min\left\{ \theta, \frac{1}{\lambda_k((A(\omega))^* W^{-1} A(\omega))} \right\} d\omega.$$

Наконец, следует отметить, что условия, требуемые в следствии 1, являются более ограничительными, чем условия в теореме 4, поскольку при $\rho(\Psi_q(B)) < 1$ из [10, теорема 6] следует, что $\det(B(\omega)) \neq 0$ для всех $\omega \in \mathbb{R}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Здесь мы покажем, почему без ограничения общности можно считать, что если $\det(B_0) \neq 0$ в определении 2, то $B_0 = I_N$.

Доказательство. Так как $\det(B_0) \neq 0$, то равенство (2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=0}^{n-1} B_{-k} B_0^{-1} B_0 w_{n-k} - \sum_{\ell=1}^{n-1} A_{-\ell} x_{n-\ell} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{B}_{-k} \widehat{w}_{n-k} - \sum_{\ell=1}^{n-1} A_{-\ell} x_{n-\ell}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

где $\widehat{B}_0 = I_N$, $\widehat{B}_{-k} = B_{-k} B_0^{-1}$ и $\widehat{w}_k = B_0 w_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\mathbf{E}(\widehat{w}_k) = \mathbf{E}(B_0 w_k) = B_0 \mathbf{E}(w_k) = B_0 0_{N \times 1} = 0_{N \times 1}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

т.е. $\{\widehat{w}_n\}$ является процессом с нулевым средним. Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\widehat{w}_j \widehat{w}_h) &= \mathbf{E}(B_0 w_j (B_0 w_h)^*) = \mathbf{E}(B_0 w_j w_h^* B_0^*) = B_0 \mathbf{E}(w_j w_h^*) B_0^* = \\ &= B_0 (\delta_{j,h} W) B_0^* = \delta_{j,h} B_0 W B_0^* \end{aligned}$$

для всех $j, h \in \mathbb{N}$. Для завершения доказательства остается лишь показать, что матрица $B_0 W B_0^*$ положительно определена. Если $u \in \mathbb{C}^{N \times 1} \setminus 0_{N \times 1}$, то $B_0^* u \neq 0_{N \times 1}$, поскольку

$$\det(B_0^*) = \overline{\det(B_0)} \neq 0.$$

Так как W положительно определена, то

$$u^* B_0 W B_0^* u = (B_0^* u)^* W B_0^* u > 0. \quad \blacktriangle$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Здесь мы докажем, что условие теоремы 1 равносильно условию, приведенному в [5, теорема 8], а именно $\rho(\Psi_p(A)) < 1$ равносильно тому, что

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \sigma_{nN}(T_n(A)) > 0 \quad \text{и} \quad \inf_{\omega \in [0, 2\pi]} \lambda_N((A(\omega))^* A(\omega)) > 0.$$

Доказательство. Разобьем доказательство на три шага.

Шаг 1: Докажем, что

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \sigma_{nN}(T_n(A)) > 0$$

тогда и только тогда, когда множество $\{\|(T_n(A))^{-1}\|_2\}$ ограничено.

С одной стороны, если $\inf_{n \in \mathbb{N}} \sigma_{nN}(T_n(A)) > 0$, то

$$0 \leq \|(T_n(A))^{-1}\|_2 = \sigma_1((T_n(A))^{-1}) = \frac{1}{\sigma_{nN}(T_n(A))} \leq \frac{1}{\inf_{m \in \mathbb{N}} \sigma_{mN}(T_m(A))} < \infty$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. С другой стороны, если $\{\|(T_n(A))^{-1}\|_2\}$ ограничено, то

$$\sigma_{nN}(T_n(A)) = \frac{1}{\sigma_1((T_n(A))^{-1})} = \frac{1}{\|(T_n(A))^{-1}\|_2} \geq \frac{1}{\sup_{m \in \mathbb{N}} \|(T_m(A))^{-1}\|_2}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, и следовательно,

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \sigma_{nN}(T_n(A)) \geq \frac{1}{\sup_{n \in \mathbb{N}} \|(T_n(A))^{-1}\|_2} > 0.$$

Шаг 2: Покажем, что если $\det(A(\omega)) \neq 0$ для всех $\omega \in \mathbb{R}$, то выполнено условие

$$\inf_{\omega \in [0, 2\pi]} \lambda_N((A(\omega))^* A(\omega)) > 0.$$

Так как матрица $(A(\omega))^* A(\omega)$ эрмитова, то применяя [15, следствие VI.1.6], получаем, что

$$\inf_{\omega \in [0, 2\pi]} \lambda_N((A(\omega))^* A(\omega)) = \min_{\omega \in [0, 2\pi]} \lambda_N((A(\omega))^* A(\omega)).$$

Следовательно, для завершения доказательства этого шага осталось лишь доказать, что $\lambda_N((A(\omega))^* A(\omega)) > 0$ для всех $\omega \in \mathbb{R}$. С одной стороны, так как $(A(\omega))^* A(\omega)$ положительно полуопределена, то $\lambda_N((A(\omega))^* A(\omega)) \geq 0$ для всех $\omega \in \mathbb{R}$. С другой стороны, так как

$$\det((A(\omega))^* A(\omega)) = |\det(A(\omega))|^2 \neq 0,$$

то $\lambda_N((A(\omega))^* A(\omega)) \neq 0$ для всех $\omega \in \mathbb{R}$.

Шаг 3: Докажем, что $\rho(\Psi_p(A)) < 1$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \sigma_{nN}(T_n(A)) > 0 \quad \text{и} \quad \inf_{\omega \in [0, 2\pi]} \lambda_N((A(\omega))^* A(\omega)) > 0.$$

Это непосредственно вытекает из шагов 1, 2 и утверждения [10, теорема 6]. $\blacktriangle$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shannon C.E. A Mathematical Theory of Communication // Bell Syst. Tech. J. 1948. V. 27. № 3. P. 379–423. <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x>
2. Wyner A. Fundamental Limits in Information Theory // Proc. IEEE. 1981. V. 69. № 2. P. 239–251. <https://doi.org/10.1109/PROC.1981.11956>
3. Cover T.M., Thomas J.A. Elements of Information Theory. Hoboken, NJ: Wiley, 2006.
4. Toms W., Berger T. Information Rates of Stochastically Driven Dynamic Systems // IEEE Trans. Inform. Theory. 1971. V. 17. № 1. P. 113–114. <https://doi.org/10.1109/TIT.1971.1054569>
5. Gutiérrez-Gutiérrez J., Crespo P.M. Asymptotically Equivalent Sequences of Matrices and Multivariate ARMA Processes // IEEE Trans. Inform. Theory. 2011. V. 57. № 8. P. 5444–5454. <https://doi.org/10.1109/TIT.2011.2159042>
6. Gray R.M. Toeplitz and Circulant Matrices: A Review // Found. Trends Commun. Inform. Theory. 2006. V. 2. № 3. P. 155–239. <https://doi.org/10.1561/0100000006>
7. Gutiérrez-Gutiérrez J., Crespo P.M. Block Toeplitz Matrices: Asymptotic Results and Applications // Found. Trends Commun. Inform. Theory. 2011. V. 8. № 3. P. 179–257. <https://doi.org/10.1561/0100000006>
8. Ephraim Y., Lev-Ari H., Gray R.M. Asymptotic Minimum Discrimination Information Measure for Asymptotically Weakly Stationary Processes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1988. V. 34. № 5. P. 1033–1040. <https://doi.org/10.1109/18.21226>
9. Gersho A., Gray R.M. Vector Quantization and Signal Compression. New York: Springer, 2012.

10. *Gutiérrez-Gutiérrez J., Barasoain-Echepare Í., Zárraga-Rodríguez M., Insausti X.* Necessary and Sufficient Conditions for AR Vector Processes to Be Stationary: Applications in Information Theory and in Statistical Signal Processing // *Appl. Math. Comput.* 2023. V. 445, Article 127824 (14 pp.). <https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.127824>
11. *Gutiérrez-Gutiérrez J., Zárraga-Rodríguez M., Insausti X.* On the Asymptotic Optimality of a Low-Complexity Coding Strategy for WSS, MA, and AR Vector Sources // *Entropy*. 2020. V. 22. № 12, Article 1378 (20 pp.). <https://doi.org/10.3390/e22121378>
12. *Kolmogorov A.* On the Shannon Theory of Information Transmission in the Case of Continuous Signals // *IRE Trans. Inform. Theory*. 1956. V. 2. № 4. P. 102–108. <https://doi.org/10.1109/TIT.1956.1056823>
13. *Gutiérrez-Gutiérrez J.* A Modified Version of the Pisarenko Method to Estimate the Power Spectral Density of Any Asymptotically Wide Sense Stationary Vector Process // *Appl. Math. Comput.* 2019. V. 362, Article 124526 (11 pp.). <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.06.040>
14. *Gutiérrez-Gutiérrez J., Zárraga-Rodríguez M., Crespo P.M., Insausti X.* Rate Distortion Function of Gaussian Asymptotically WSS Vector Processes // *Entropy*. 2018. V. 20. № 9, Article 719 (12 pp.). <https://doi.org/10.3390/e20090719>
15. *Bhatia R.* *Matrix Analysis*. New York: Springer, 1997.

Гутьеррес-Гутьеррес Хесус (Gutiérrez-Gutiérrez, Jesús)
Барасоайн-Эчепаре Иньиго[✉] (Barasoain-Echepare, Íñigo)
Саппага-Родригес Марта (Zárraga-Rodríguez, Marta)
Инсаусти Шавьер (Insausti, Xabier)
 Инженерная школа Теснун, Университет Наварры,
 Сан-Себастьян, Испания
[✉]ibarasoaine@tecnun.es

Поступила в редакцию
 30.11.2023
 После доработки
 26.03.2024
 Принята к публикации
 09.04.2024