

УДК 621.391 : 519.725

© 2024 г. Л.А. Бассальго, В.А. Зиновьев, В.С. Лебедев

КОНСТРУКЦИИ НЕДВОИЧНЫХ КОДОВ, ЛЕЖАЩИХ НА ГРАНИЦЕ ДЖОНСОНА

Предложено несколько конструкций недвоичных равновесных кодов, лежащих на границе Джонсона.

Ключевые слова: недвоичный равновесный код, граница Джонсона, посимвольно равномерный код, эквидистантный код.

DOI: 10.31857/S0555292324010030, EDN: URTWNL

§ 1. Введение

Пусть C – q -ичный равновесный код над алфавитом $\{0, 1, \dots, q-1\}$ длины n мощности N ($N = |C|$) с весом кодовых слов w и расстоянием d . Такой код назовем $(n, N, w, d)_q$ -кодом. Мощность N такого $(n, N, w, d)_q$ -кода удовлетворяет следующей обобщенной границе Джонсона [1]:

$$N \leq \frac{(q-1)dn}{qw^2 - (q-1)(2w-d)n}, \quad (1)$$

если знаменатель положителен.

Напомним (см. [2]), что равновесный код достигает границы (1) тогда и только тогда, когда он эквидистантен и посимвольно равномерен. Посимвольно равномерным называется код, матрица которого размера $N \times n$ содержит каждый ненулевой символ в каждом столбце одно и то же число раз независимо от выбора символа и выбора столбца.

Всюду в дальнейшем будем считать, что каждый ненулевой символ в каждом столбце встречается t раз, $t > 0$, а следовательно, нулевой символ в каждом столбце встречается

$$m = N - (q-1)t$$

раз, $m > 0$.

Отметим, что при $m \neq t$ эквидистантный посимвольно равномерный код является равновесным, но при $m = t$ это не так: например, код $\{(00), (11), (22)\}$ является эквидистантным и посимвольно равномерным, но не равновесным.

Равновесный эквидистантный посимвольно равномерный код будем кратко называть РЭПР-кодом. Несложно вычислить (см., например, [2]), что параметры всякого $(n, N, w, d)_q$ -РЭПР-кода при заданных q , t , m и n связаны следующими соотношениями:

$$N = (q-1)t + m, \quad w = \frac{(N-m)n}{N}, \quad d = \frac{(N-m)(N+m-t)n}{N(N-1)}. \quad (2)$$

Прежде чем перейти к изложению конструкций, отметим, что для любых заданных q , t и m существует некоторый РЭПР-код, но, к сожалению, слишком большой длины.

Предложение 1. *При заданных q , t и m существует РЭПР-код длины*

$$n = \frac{N!}{m!(t!)^{q-1}(q-1)!}.$$

Доказательство. Соответствующая матрица кода размера $N \times n$ состоит из столбцов, каждый из которых содержит m нулей и по t раз каждый ненулевой символ. Выберем в столбце m позиций для нулевых символов (таких выборов всего $\binom{N}{m}$), а оставшееся множество из

$$N - m = (q - 1)t$$

позиций разобьем на $q - 1$ подмножеств мощности t . Число таких неупорядоченных разбиений равно

$$\frac{(N - m)!}{(t!)^{q-1}(q-1)!}.$$

В матрицу кодовых слов при фиксированном выборе m позиций для нулевого символа запишем все $\frac{(N - m)!}{(t!)^{q-1}(q-1)!}$ столбцов неупорядоченных разбиений, и каждый такой столбец заполним ненулевыми кодовыми символами так, что на всех t позициях, соответствующих фиксированному элементу разбиения, стоит один и тот же ненулевой символ, а на позициях разных элементов разбиения эти символы различны. Число столбцов в такой матрице равно

$$\binom{N}{m} \frac{(N - m)!}{(t!)^{q-1}(q-1)!} = \frac{N!}{m!(t!)^{q-1}(q-1)!}.$$

Очевидно, что эта матрица задает равновесный эквидистантный посимвольно равномерный код. ▲

§ 2. Каскадная конструкция

Естественно желание использовать для построения РЭПР-кодов каскадную конструкцию. Пусть имеется (q_1, t_1, m_1, n_1) -РЭПР-код (далее будем называть его внешним кодом) и (q_2, t_2, m_2, n_2) -РЭПР-код (называемый далее внутренним кодом),

$$N_2 = (q_2 - 1)t_2 + m_2 = q_1 - 1.$$

Стандартная каскадная конструкция состоит в замене нулевого символа внешнего кода на нулевое слово длины n_2 , а каждого фиксированного ненулевого символа внешнего кода – на фиксированное слово внутреннего кода. Очевидно, что полученный таким образом каскадный код будет посимвольно равномерным с параметрами

$$q_3 = q_2, \quad t_3 = t_1 t_2, \quad m_3 = m_1 + t_1 m_2, \quad n_3 = n_1 n_2 \quad (3)$$

и равновесным ($w_3 = w_1 w_2$), однако такой код может быть не эквидистантным. Для того чтобы он был эквидистантным, необходимо и достаточно выполнение по крайней мере одного из двух следующих дополнительных условий:

а) на внешний код: число $\xi(x, y)$ координат, в которых любые два слова x, y внешнего кода равны нулю, не зависит от выбора этих двух слов (положим это число равным ξ , $\xi = \frac{m_1(m_1 - 1)n_1}{N_1(N_1 - 1)}$);

б) на внутренний код: $w_2 = d_2$, что эквивалентно равенству $m_2 = t_2 - 1$.

Эти условия вытекают из вычисления расстояния между двумя словами x, y каскадного кода:

$$\begin{aligned} d_3(x, y) &= (d_1 - 2(n_1 - w_1 - \xi(x, y)))d_2 + 2(n_1 - w_1 - \xi(x, y))w_2 = \\ &= d_1d_2 + 2(n_1 - w_1 - \xi(x, y))(w_2 - d_2). \end{aligned}$$

Внешние (q_1, t_1, m_1, n_1) -РЭПР-коды со свойством а) были введены в [3], где было доказано, что их существование эквивалентно существованию m_1 -квазиразрешимых схем, и были построены семейства таких кодов. Отметим, что не всякий РЭПР-код удовлетворяет условию а). Таковым, к примеру, является РЭПР-код с параметрами

$$q = 4, \quad N = 9, \quad n = 18, \quad m = 3, \quad t = 2,$$

столбцы которого образованы циклическими сдвигами двух столбцов-генераторов

$$(0\ 3\ 2\ 1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 0)^T \quad \text{и} \quad (2\ 1\ 1\ 0\ 0\ 3\ 0\ 2\ 3)^T.$$

Внутренние (q_2, t_2, m_2, n_2) -РЭПР-коды со свойством б) – это коды, лежащие на границе Плоткина, из которых удалено нулевое слово (мощность такого кода $N_2 = \frac{(q_2 - 1)n_2}{q_2d_2 - (q_2 - 1)n_2}$).

Таким образом, если внутренний код удовлетворяет условию б), то при любом внешнем РЭПР-коде каскадный код является РЭПР-кодом с расстоянием $d_3 = d_1d_2$. Если внутренний код не удовлетворяет условию б), то внешний код должен удовлетворять условию а), и тогда

$$d_3 = d_1d_2 + 2(n_1 - w_1 - \xi)(w_2 - d_2).$$

Очевидно, что $N_3 = N_1$, а параметры d_3 и w_3 каскадного кода легко вычисляются исходя из (2) и (3).

Приведем теперь примеры каскадных конструкций.

Пример 1. Выберем в качестве внешнего кода $(q_1, t_1 = 2, m_1 = 1, n_1 = 2q_1 - 1)$ -РЭПР-код, а в качестве внутреннего – РЭПР-код из предложения 2 работы [4] с параметрами

$$N_2 = p^2, \quad q_2 = (p^2 - p)/2 + 1, \quad t_2 = 2, \quad m_2 = p, \quad n_2 = p(p + 1)/2,$$

где p – степень простого числа. В результате получим РЭПР-код с параметрами

$$q_3 = (p^2 - p)/2 + 1, \quad t_3 = 4, \quad m_3 = 1 + 2p, \quad n_3 = (2p^2 + 1)p(p + 1)/2.$$

Такой внешний код существует при любых q_1 (см. [5]) и удовлетворяет условию а), как и любой РЭПР-код при $m = 1$. Так как в каскадной конструкции $N_2 = q_1 - 1$, то в данном примере надо выбрать $q_1 = p^2 + 1$.

Согласно формуле перехода от параметров РЭПР-кода к привычным кодовым параметрам построенный каскадный РЭПР-код является кодом над алфавитом размера $q_3 = (p^2 - p)/2 + 1$, мощности $N_3 = 2p^2 + 1$, длины $n_3 = (2p^2 + 1)p(p + 1)/2$, с весом кодовых слов $w_3 = p^2(p^2 - 1)$ и расстоянием $d_3 = (p^2 - 1)(p^2 + p - 1)$.

Например, выбрав $p = 3$, получим четверичный код мощности 19, длины 114, с весом кодовых слов 72 и расстоянием 88.

Пример 2. Выберем в качестве внешнего кода $(q_1, t_1, m_1 = 1, n_1 = (q_1 - 1)t_1 + 1)$ -РЭПР-код, а в качестве внутреннего – РЭПР-код из предложения 1 с параметрами

$$\left(q_2 = q, t_2 = 1, m_2, n_2 = \binom{q_2 - 1 + m_2}{m_2} \right).$$

Так как $N_2 = (q_2 - 1) + m_2 = q_1 - 1$, то в данном примере надо выбрать $m_2 = q_1 - q$. Получим РЭПР-код с параметрами

$$\left(q_3 = q, t_3 = t_1, m_3 = 1 + t_1(q_1 - q), n_3 = [(q_1 - 1)t_1 + 1] \binom{q_1 - 1}{q_1 - q} \right).$$

Тогда согласно формуле перехода от параметров РЭПР-кода к привычным кодовым параметрам построенный каскадный РЭПР-код является кодом над алфавитом размера q , мощности $(q_1 - 1)t_1 + 1$, длины

$$[(q_1 - 1)t_1 + 1] \binom{q_1 - 1}{q_1 - q},$$

с весом кодовых слов

$$(q - 1)t_1 \binom{q_1 - 1}{q - 1}$$

и расстоянием

$$[(2q_1 - q - 2)t_1 + 2] \binom{q_1 - 2}{q - 2}.$$

Использованный в этом примере внешний код приведен в [6], где показано, что он эквивалентен почти разрешимой блок-схеме.

Например, выбрав в качестве внешнего кода $(6, 5, 1, 26)$ -РЭПР-код, а в качестве внутреннего $(4, 1, 2, 10)$ -РЭПР-код из предложения 1, получим четверичный РЭПР-код мощности 26, длины 260, с весом 150 и расстоянием 192.

Прежде чем привести еще один пример каскадной конструкции, мы ее слегка модифицируем – допустим в качестве внешнего кода код, лежащий на границе Плоткина, т.е. используем эквидистантный посимвольно равномерный, но не равновесный код. Внутренний код остается прежним, но теперь каждому символу внешнего кода (включая нулевой) мы ставим в соответствие одно из слов внутреннего кода. Очевидно, что при такой модифицированной каскадной конструкции полученный код будет посимвольно равномерным с параметрами

$$q_3 = q_2, \quad t_3 = t_1 t_2, \quad m_3 = t_1 m_2, \quad n_3 = n_1 n_2, \quad (4)$$

так как $m_1 = t_1$, равновесным ($w_3 = n_1 w_2$) и эквидистантным ($d_3 = d_1 d_2$).

Так как $N_1 = q_1 t_1$, $N_2 = q_1$, то

$$N_3 = (q_2 - 1)t_1 t_2 + t_1 m_2 = [(q_2 - 1)t_2 + m_2]t_1 = N_2 t_1 = q_1 t_1 = N_1.$$

Пример 3. Пусть внешний код лежит на границе Плоткина с параметрами $(q_1, t_1, m_1 = t_1, n_1)$ (см. [5, 7]), а в качестве внутреннего выберем РЭПР-код из предложения 1 с параметрами

$$\left(q_2 = q, t_2 = 1, m_2, n_2 = \binom{q_2 - 1 + m_2}{m_2} \right).$$

Так как $N_2 = q_2 - 1 + m_2 = q_1$, то в данном примере надо выбрать $m_2 = q_1 - q + 1$. В результате получим РЭПР-код с параметрами

$$\left(q_3 = q, t_3 = t_1, m_3 = t_1(q_1 - q + 1), n_3 = n_1 \binom{q_1}{q - 1} \right).$$

Согласно формуле перехода от параметров РЭПР-кода к привычным кодовым параметрам построенный каскадный РЭПР-код является кодом над алфавитом раз-

мера q , мощности $q_1 t_1$, длины

$$n_1 \binom{q_1}{q-1},$$

с весом кодовых слов

$$n_1 \binom{q_1 - 1}{q-2}$$

и расстоянием

$$n_1 \binom{q_1 - 1}{q-2} \frac{(2q_1 - q)t_1}{q_1 t_1 - 1}.$$

Например, выбрав в качестве внешнего $(7, 7, 7, 8)$ -РЭПР-код (см. [7]), а в качестве внутреннего – $(4, 1, 4, 35)$ -РЭПР-код из предложения 1, получим четверичный РЭПР-код мощности 49, длины 280, с весом 120 и расстоянием 175.

Теперь приведем две конструкции, использующие блок-схемы.

§ 3. Конструкция А

Блок-схема $B(v, k, \lambda)$ называется *разрешимой* и обозначается через $RB(v, k, \lambda)$, если она перестановкой строк и столбцов может быть приведена к следующему виду:

$$A = [A_1 \mid A_2 \mid \dots \mid A_r],$$

где каждая подматрица A_j размера $v \times \frac{v}{k}$ состоит из строк веса 1. Разрешимая блок-схема $RB(v, k, \lambda)$ называется *аффинно разрешимой* и обозначается через $ARB(v, k, \lambda)$, если скалярное произведение любых двух столбцов из различных подматриц $A_j, A_{j'}$, $j \neq j'$, равно μ . Согласно теореме Боуза (см. [8, гл. II, теорема 8.7]) параметры аффинно разрешимой блок-схемы можно записать в следующем виде:

$$k = t\mu, \quad v = t^2\mu, \quad \lambda = \frac{t\mu - 1}{t - 1},$$

где $t \geq 2$. Отсюда мы видим, что $\lambda = k(k-1)/(v-k)$, и следовательно, аффинно разрешимая схема является частным случаем блок-схемы $B(v, k, \lambda)$, в котором

$$\lambda = \frac{k(k-1)}{v-k}.$$

Построение троичного кода из аффинно разрешимой схемы весьма просто – выбираем любые два столбца из любых двух различных подматриц схемы и превращаем эти два столбца в столбец троичного кода по следующему правилу:

$$(1, 1) \rightarrow 0, \quad (0, 0) \rightarrow 0, \quad (1, 0) \rightarrow 1, \quad (0, 1) \rightarrow 2.$$

Результат такого преобразования подытоживает следующее

Утверждение 1. *Любая аффинно разрешимая схема $ARB(v, k, \lambda)$ порождает троичный равновесный эквидистантный код, лежащий на границе Джонсона (1), с параметрами*

$$q = 3, \quad N = v, \\ n = \left(\frac{v}{k}\right)^2 \binom{r}{2} = \frac{v^3(v-1)(k-1)}{2k(v-k)^2},$$

$$w = 2 \left(\frac{v}{k} - 1 \right) \binom{r}{2} = \frac{v(v-1)(k-1)}{v-k},$$

$$d = \lambda(r-\lambda) \left(2 + 2 \left(\frac{v}{k} - 1 \right) \right) + \binom{r-\lambda}{2} \left(2 \left(\frac{v}{k} - 1 \right) + 2 \left(\frac{v}{k} - 2 \right) \right) =$$

$$= \frac{(k-1)(2v^2 - 3vk + 3k^2)}{v-k}.$$

Доказательство. Здесь пояснения требуют лишь левые равенства, ибо правые равенства следуют из того факта, что для аффинно разрешимой схемы

$$\lambda = \frac{k(k-1)}{v-k}, \quad r = \frac{k(v-1)}{v-k} \quad \text{и} \quad r - \lambda = k.$$

Вычисление веса w кодового слова очевидно, так как имеется всего r подматриц, и вклад любых двух подматриц в вес фиксированного слова равен $2 \left(\frac{v}{k} - 1 \right)$, ибо каждая строка любой подматрицы содержит ровно одну единицу, а длина каждой строки подматрицы равна v/k .

Рассмотрим теперь две фиксированные строки матрицы $\text{ARB}(v, k, \lambda)$ и вычислим вклад каждой пары подматриц в расстояние троичного кода между соответствующими кодовыми словами. Имеется ровно λ подматриц, в которых фиксированные две строки подматриц одинаковы, и $r - \lambda$ подматриц, в которых они различны. Пары подматриц первого типа не вносят вклада в расстояние. Рассмотрим теперь две фиксированные строки подматрицы первого типа и подматрицы второго типа: их вклад в расстояние равен

$$2 + 2 \left(\frac{v}{k} - 1 \right).$$

Осталось заметить, что вклад в расстояние двух подматриц второго типа равен

$$2 \left(\frac{v}{k} - 1 \right) + 2 \left(\frac{v}{k} - 2 \right). \quad \blacktriangle$$

§ 4. Конструкция В

Еще одно семейство недвоичных эквидистантных равновесных кодов, лежащих на границе Джонсона, строится с использованием идеи одновременного построения блок-схем для всех символов. Используя метод построения блок-схемы из [9], удастся разбить кодовую матрицу размера $N \times n$ на q блок-схем (т.е. для каждого символа i замена этого символа на единицу, а всех остальных символов на ноль приводит к блок-схеме).

Пусть $v = p^s$, где p – нечетное простое, $s = 1, 2, \dots$, и $k < v$. Опишем построение блок-схемы из работы [9]: выбираются k различных элементов $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ поля $\mathbb{F}_v$ и образуются $(v-1)/2$ блоков-генераторов

$$B_j = \beta_j \times A = (\beta_j \alpha_1, \beta_j \alpha_2, \dots, \beta_j \alpha_k), \quad j = 1, 2, \dots, (v-1)/2$$

(здесь β_j – различные ненулевые элементы поля, такие что $\beta_j \neq -\beta_j$, т.е. из каждой пары $\beta_j, -\beta_j$ выбирается один элемент и всего выбрано $(v-1)/2$ таких элементов поля). Затем из каждого блока-генератора B_j , $j = 1, 2, \dots, (v-1)/2$, порождаются v блоков

$$\beta + B_j = (\beta + \beta_j \alpha_1, \beta + \beta_j \alpha_2, \dots, \beta + \beta_j \alpha_k)$$

для всех $\beta \in \mathbb{F}_v$ (здесь знак $+$ обозначает сложение вектора с элементом). Таким образом, каждый блок-генератор порождает v блоков, и всего получаем $v(v-1)/2$

блоков, каждый из которых содержит k элементов поля. Теорема из [9] утверждает, что полученные таким образом $v(v-1)/2$ блоков представляют собой $B(v, k, \lambda)$ -схему с параметром

$$\lambda = \frac{k(k-1)}{2}$$

(соответственно, $b = v(v-1)/2$, $r = k(v-1)/2$). Построение q -ичного кода из такой $B(v, k, \lambda)$ -схемы совсем просто.

Утверждение 2. Пусть $v = p^s$, где p – нечетное простое, и пусть натуральные числа s, k' таковы, что $(q-1)k' < v$. Тогда в явном виде строится q -ичный равновесный эквидистантный код, лежащий на границе Джонсона (1), с параметрами

$$\begin{aligned} N &= v, \\ n &= \frac{v(v-1)}{2}, \\ w &= \frac{(q-1)k'(v-1)}{2}, \\ d &= (q-1)k' \left(v - \frac{qk'}{2} \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Покажем, что этот код порождается блок-схемой

$$B(v, (q-1)k', \lambda = (q-1)k'[(q-1)k' - 1]/2),$$

описанной в работе [9]. Положим $k = (q-1)k'$ и разобьем множество элементов $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ на $q-1$ подмножеств $A_1, A_2, \dots, A_{q-1}$ мощности k' . В каждом блоке, который по построению имеет вид $\beta + \beta_j \times A$, все элементы поля $\mathbb{F}_v$ вида $\beta + \beta_j \times A_i$ заменим на символ q -ичного кода i , $i = 1, 2, \dots, q-1$. Очевидно, что такой q -ичный код имеет параметры

$$N = v, \quad n = v(v-1)/2, \quad w = k(v-1)/2.$$

Он эквидистантен, ибо у любых двух кодовых слов число покоординатно совпадающих ненулевых символов равно $k'(k'-1)/2$ для любого ненулевого символа, а число покоординатно совпадающих нулевых символов равно

$$v(v-1)/2 - 2r + \lambda,$$

где

$$r = (q-1)k'(v-1)/2, \quad \lambda = (q-1)k'[(q-1)k' - 1]/2,$$

и следовательно, расстояние эквидистантного кода равно

$$\begin{aligned} d &= -(q-1)k'(k'-1)/2 + (q-1)k'(v-1) - (q-1)k'[(q-1)k' - 1]/2 = \\ &= (q-1)k'(v - qk'/2). \end{aligned}$$

Так как код равносимвольный и эквидистантный, то он лежит на границе Джонсона, что, впрочем, нетрудно проверить и непосредственно. ▲

§ 5. Примеры

Приведем теперь примеры применения конструкций А и В.

Пример 4 (конструкция А). Схема Адамара с параметрами

$$v = 4\ell, \quad k = 2\ell, \quad \lambda = 2\ell - 1, \quad \mu = \ell$$

является аффинно разрешимой схемой.

Так как $k = 2\mu = v/2$ и $k - \mu = v - \mu - 2(k - \mu) = \ell$, то получаем троичные коды с параметрами

$$q = 3, \quad n = 4(4\ell - 1)(2\ell - 1), \quad N = 4\ell, \\ w = 2(4\ell - 1)(2\ell - 1), \quad d = 10\ell(2\ell - 1).$$

Очевидно, что таким же способом, как построен троичный код, можно построить четверичный код, превращая пару $(1, 1)$ в символ 3. Но требование, чтобы полученный четверичный код лежал на границе Джонсона, не порождает новый код, а приводит к коду, который является четырехкратным повторением четверичного кода, построенного в [10].

Пример 5 (конструкция В). Выбрав $v = 19$, $q = 4$, $k' = 4$, получим четверичный код мощности 19, длины 171, с весом кодовых слов 108 и расстоянием 132. Параметры $t = 4$, $m = 7$ этого кода совпадают с параметрами четверичного кода в примере 1, но длина кода в примере 1 равна 114. Минимальная длина РЭПР-кода при $q = 4$, $t = 4$, $m = 7$ ограничена снизу величиной 57 (см. [4, предложение 4]).

Если взять $q = 3$, $t = 7$, $m = 5$, то длина кода из конструкции В равна 171, но уже не может быть уменьшена, поскольку из (2) имеем

$$d = (7 \times 17)n / (19 \times 9),$$

а расстояние кода является целым числом.

Отметим, что связь разрешимых блок-схем с оптимальными недвоичными равновесными кодами также исследуется в работе [11], где авторы используют транспонированную (в отличие от данной статьи) матрицу инцидентности блок-схем для построения кодовой матрицы.

Авторы весьма благодарны рецензенту, привлечшему их внимание к каскадной конструкции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бассалыго Л.А. Новые верхние границы для кодов, исправляющих ошибки // Пробл. передачи информ. 1965. Т. 1. № 4. С. 41–44. <http://www.mathnet.ru/ppi762>
2. Бассалыго Л.А., Зиновьев В.А., Лебедев В.С. Симметричные блок-схемы и оптимальные эквидистантные коды // Пробл. передачи информ. 2020. Т. 56. № 3. С. 50–58. <https://doi.org/10.31857/S055529232003002X>
3. Бассалыго Л.А., Зиновьев В.А., Лебедев В.С. Об m -квазиразрешимых блок-схемах и q -ичных равновесных кодах // Пробл. передачи информ. 2018. Т. 54. № 3. С. 54–61. <http://www.mathnet.ru/ppi2272>
4. Бассалыго Л.А., Зиновьев В.А., Лебедев В.С. Слабо разрешимые блок-схемы и недвоичные коды, лежащие на границе Джонсона // Пробл. передачи информ. 2022. Т. 58. № 1. С. 3–15. <https://doi.org/10.31857/S0555292322010016>
5. Семаков Н.В., Зиновьев В.А. Эквидистантные q -ичные коды с максимальным расстоянием и разрешимые уравновешенные неполные блок-схемы // Пробл. передачи информ. 1968. Т. 4. № 2. С. 3–10. <http://www.mathnet.ru/ppi1845>
6. Бассалыго Л.А., Зиновьев В.А. Замечание об уравновешенных неполных блок-схемах, почти разрешимых блок-схемах и q -ичных равновесных кодах // Пробл. передачи информ. 2017. Т. 53. № 1. С. 56–59. <https://www.mathnet.ru/ppi2227>

7. *Семаков Н.В., Зиновьев В.А., Зайцев Г.В.* Класс максимальных эквидистантных кодов // Пробл. передачи информ. 1969. Т. 5. № 2. С. 84–87. <https://www.mathnet.ru/ppi1804>
8. *Beth T., Jungnickel D., Lenz B.* Design Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
9. *Ramanujacharyulu C.* A New General Series of Balanced Incomplete Block Designs // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. V. 17. № 5. P. 1064–1068. <https://doi.org/10.2307/2036090>
10. *Sinha K., Sinha N.* A Class of Optimal Quaternary Codes // Ars Combin. 2010. V. 94. P. 61–64.
11. *Shi M., Xia Y., Krotov D.S.* A Family of Diameter Perfect Constant-Weight Codes from Steiner Systems // J. Combin. Theory Ser. A. 2003. V. 200. Paper No. 105790 (20 pp.). <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2023.105790>

Бассалыго Леонид Александрович
Зиновьев Виктор Александрович
Лебедев Владимир Сергеевич
 Институт проблем передачи информации
 им. А.А. Харкевича РАН, Москва
bass@iitp.ru
vazinov@iitp.ru
lebedev37@mail.ru

Поступила в редакцию
 21.09.2023
 После доработки
 18.03.2024
 Принята к публикации
 19.03.2024