

УДК 621.391 : 530.145 : 515.162.8

© 2024 г. А.А. Морозов

ОБ ИЗМЕРЕНИИ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ЗАРЯДА ЭНИОНОВ¹

Обсуждается принцип измерения топологического заряда или представления, в котором находится набор энионов. Описывается метод измерения и исследуется, как он работает для различных значений параметров теории. Также предлагается способ, с помощью которого этот метод можно сделать более эффективным.

Ключевые слова: топологический квантовый компьютер, теория узлов, квантовые измерения.

DOI: 10.31857/S0555292324010054, **EDN:** JDBCMW

§ 1. Введение

Топологический квантовый компьютер – это перспективная модель квантового компьютера, которая, как ожидается, будет иметь малую вероятность ошибок по построению [1–3]. Модели такого квантового компьютера основаны на перемещении квазичастиц, называемых энионами. Эти частицы могут существовать в некоторых эффективных двумерных теориях и имеют статистику, отличную от фермионов и бозонов. А именно, перемена их местами порождает нетривиальный и в общем случае неабелев оператор.

Энионы описываются эффективной теорией Черна – Саймонса

$$S_{CS} = \frac{k}{4\pi} \int_{S^3} A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A. \quad (1)$$

Эта теория калибровочно-инвариантна, при этом обычно рассматривается калибровочная группа $SU(N)$. Энионы в такой теории могут преобразовываться в разных представлениях, которые также называют топологическим зарядом.

Квантовые вычисления в модели топологического квантового компьютера осуществляются посредством перемещения энионов, нетривиальные операции при этом получаются посредством сплетения их траекторий (см. рис. 1). Базовый алгоритм устроен следующим образом. Во-первых, пара или несколько пар энионов рождаются, затем их траектории сплетаются, и наконец, мы пытаемся аннигилировать пары энионов, и в зависимости от конечного состояния системы они могут аннигилировать или не аннигилировать. Если энионы аннигилировали, то их траектории образуют узел или зацепление, а амплитуда вероятности такого процесса равна полиному соответствующего узла [4–6]. Сплетение траекторий соответствует квантовой $\mathcal{R}$ -матрице, которая определяет элементарную операцию в топологическом квантовом компьютере.

¹ Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-71-10058.

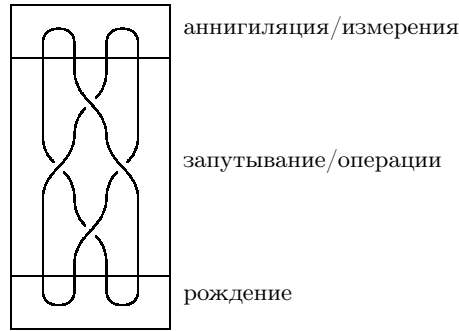


Рис. 1. Базовый квантовый алгоритм для топологического квантового компьютера. Пары энионов рождаются, сплетаются и аннигилируют. Двухмостовое зацепление, изображенное на рисунке, соответствует одно-кубитным операциям

Простейшее описание кубита [5–7] состоит из двух пар энионов, чьи траектории составляют двухмостовой узел. С точки зрения теории представлений вся коса, включающая в себя четыре эниона, находится в тривиальном представлении калибровочной группы, так как квантовые $\mathcal{R}$ -матрицы не меняют неприводимое представление, в котором находится вся коса любой ширины (подробнее см. в [8–10]). Однако в произведении представлений, связанных с энионами в косе, может быть несколько тривиальных представлений. Если все энионы находятся в фундаментальном представлении группы $SU(N)$ (энионы, летящие во встречном направлении, при этом соответствуют антифундаментальному представлению), пространство тривиальных представлений окажется двумерным. Эти тривиальные представления соответствуют различным представлениям, в которых находятся отдельные пары энионов, а не вся коса.

Существуют также другие подходы к построению топологического квантового компьютера. В работе [11] вместо группы кос, рассматриваемой в данной статье, изучается подход, связанный с алгеброй Темперли – Либа. Эта алгебра тесно связана с группой $SU(2)$ и дает альтернативный подход к вычислению полиномов Джонса. Эти отличия, однако, несущественны в контексте задачи, рассматриваемой в данной статье.

В рамках разработки инструментария для обращения с энионами важна задача измерения состояния кубита без его разрушения. В топологическом квантовом компьютере мы можем измерить неприводимое представление, в котором находится коса, состоящая из траекторий энионов. Такое представление также называется топологическим зарядом энионов. Эта процедура в дальнейшем может быть использована для построения многокубитных операций в топологическом квантовом компьютере [7].

В данной статье обсуждается метод измерения неприводимого представления, известного также как топологический заряд эниона, и исследуется, как можно сделать это измерение более точным.

§ 2. Метод измерения

Способ измерения представления, в котором находится какая-либо коса, состоит в оплетении дополнительной нити вокруг измеряемой косы. Другими словами, мы создаем дополнительную пару вспомогательных энионов и сплетаем один из них с исследуемой косой, затем мы измеряем вероятность аннигиляции этой вспомо-

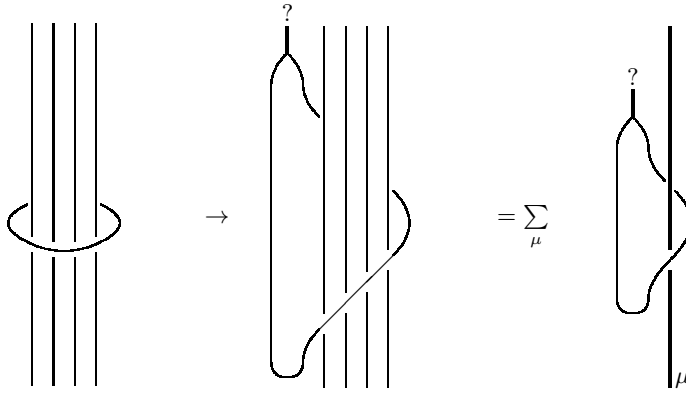


Рис. 2. Процедура измерения с помощью пары вспомогательных энионов. В зависимости от вероятности их аннигиляции мы можем найти представление μ , в котором находится коса

гательной пары энионов (см. рис. 2). В зависимости от представления, в котором находится измеряемая коса, эта вероятность будет различной.

Согласно работе [9] вместо косы мы можем рассмотреть одну нить, но в старшем неприводимом представлении. Более того, представление, в котором находится коса, остается неизменным. В данной статье мы рассмотрим случай $N = 2$ и косы, состоящей из двух энионов в фундаментальном представлении. В этом случае коса может быть в тривиальном или же в симметрическом представлении:

$$[1] \otimes [1] = \emptyset + [2], \quad \mu \in \{\emptyset, [2]\}. \quad (2)$$

Теперь, используя подходы, рассмотренные в [9, 12, 13], опишем операторы, которые возникают в таких косах.

§ 3. $\mathcal{R}$ -матрицы

Мы рассмотрим трехнитевые косы, как показано на рис. 3. Такие косы состоят из двух нитей в фундаментальном представлении (эти нити соответствуют вспомогательным энионам) и одной нити в неизвестном представлении, которое мы хотим измерить (оно может быть тривиальным или же симметрическим). Случай тривиального представления очень простой. Тривиальное представление взаимодействует тривиально со всеми другими представлениями. Это означает, что состояние первой пары нитей остается неизменным, и соответственно, вероятность успешной их аннигиляции равна 1.

Теперь обсудим случай симметрического представления. Так как изначально мы создали пару энионов в тривиальном представлении, а также есть дополнительная нить, которая несет на себе симметрическое представление [2], вся коса также находится в представлении [2]. Тем не менее в такой косе пространство таких представлений двумерно. Это можно увидеть из следующего разложения:

$$[1] \otimes [1] \otimes [2] = ([2] + \emptyset) \otimes [2] = ([4] + [2] + \emptyset) + [2]. \quad (3)$$

Одно из симметрических представлений появляется, когда первая пара нитей находится в тривиальном представлении, а другое – в симметрическом представлении. Вся коса в этом секторе описывается матрицей B размера 2×2 , которая описывает, как пара симметрических представлений в начале преобразуется в пару представлений в конце. Так как мы знаем, что состояние в начале отвечает тривиальному

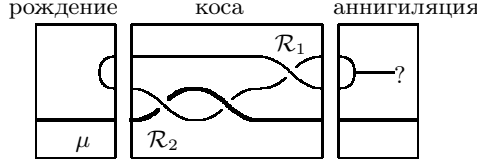


Рис. 3. Коса, которую нужно рассмотреть для описания взаимодействия между жирной нитью, которая соответствует изучаемому представлению μ , и вспомогательными энионами. Коса состоит из $\mathcal{R}$ -матриц различных типов – матрица $\mathcal{R}_1$ соответствует пересечению между первыми двумя нитями, а матрица $\mathcal{R}_2$ – пересечению между второй парой нитей

представлению по построению, элемент $B[1, 1]$ описывает амплитуду вероятности аннигиляции, а $B[1, 2]$ – не аннигиляции вспомогательной пары энионов.

Для построения матрицы B нужно описать $\mathcal{R}$ -матрицы, возникающие в такой косе. Они описываются с использованием переменной q , которая строится из уровня k теории Черна – Саймонса и квантовых чисел $[n]_q$, которые являются функциями q :

$$q = e^{\frac{2\pi i}{k+2}}, \quad [n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}. \quad (4)$$

Также важно отметить, что физическая теория Черна – Саймонса соответствует целым значениям k . Более того, как обсуждалось в работе [6], $k \geq 6$. С помощью методов, описанных в [9, 12, 13], можно построить матрицу $\mathcal{R}_2^2$, возникающую в косе, представленной на рис. 3:

$$\mathcal{R}_2^2 = \begin{pmatrix} \frac{q^2[6]_q}{[2]_q[3]_q} & \sqrt{\frac{[4]_q}{[2]_q} \frac{q^4 - q^{-2}}{[3]_q}} \\ \sqrt{\frac{[4]_q}{[2]_q} \frac{q^4 - q^{-2}}{[3]_q}} & \frac{[6]_q}{[2]_q[3]_q} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Это означает, что амплитуда вероятности получения тривиального или симметрического представления в произведении двух нитей в конце процесса, и соответственно, амплитуда вероятности энионов аннигиляции или не аннигиляции равна

$$\begin{aligned} A_\emptyset &= \frac{q^2[6]_q}{[2]_q[3]_q}, \\ A_2 &= \sqrt{\frac{[4]_q}{[2]_q} \frac{q^4 - q^{-2}}{[3]_q}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Если подставить в эти выражения $q = e^{i\varphi}$, они превратятся в

$$\begin{aligned} A_\emptyset &= \frac{\sin 6\varphi \sin \varphi}{\sin 2\varphi \sin 3\varphi} e^{2i\varphi}, \\ A_2 &= \sqrt{2 \cos 2\varphi} \, 2e^{i\varphi} \sin \varphi = \sqrt{4 \cos 2\varphi (1 - \cos 2\varphi)} e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (7)$$

На рис. 4 приведены графики вероятности того, что пара энионов находится в том или ином представлении.

При $k = 10$, $\varphi = 2\pi/(k+2) = \pi/6$ вероятность того, что вспомогательная пара энионов не аннигилирует, равна 1, если измеряемая коса находится в симметрическом представлении. Это оптимальное значение параметров теории для измерения

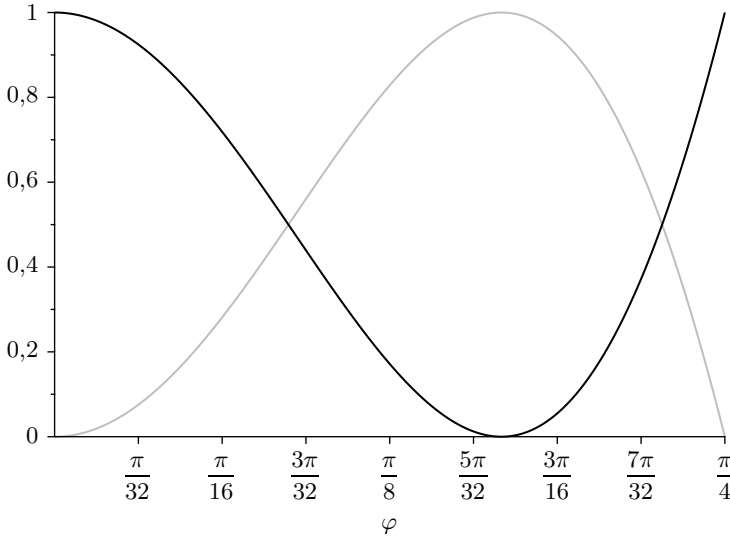


Рис. 4. Вероятности того, что пара вспомогательных энионов находится в симметрическом или тривиальном представлении в зависимости от значения φ . Черная кривая описывает вероятность измерения тривиального представления, серая кривая – симметрического представления

представления или топологического заряда. В этой точке вспомогательные энионы аннигилируют, только если измеряемое представление тривиально, и не аннигилируют, если это представление симметрическое. Для других значений параметров представление по-прежнему можно измерить, потому что измеряемое представление не изменяется при измерении, и соответственно, мы можем сделать столько измерений, сколько нам нужно, но для $k = 10$ эта процедура оказывается самой простой.

§ 4. Измерение с помощью нескольких сплетений

Мы можем модифицировать алгоритм измерения так, чтобы он лучше работал для других значений параметра k . Для этого вместо одного сплетения вспомогательного эниона с изучаемой косой можно оплести его несколько раз, и только потом попытаться аннигилировать его со вторым вспомогательным энионом, как показано на рис. 5. Если представление μ , в котором находится измеряемая нить, тривиально, то взаимодействие между этой нитью и измеряющим энионом по-прежнему отсутствует. Это означает, что для любого числа сплетений вероятность аннигиляции в конце петли равна 1.

Если измеряемое представление – симметрическое, то $2b$ сплетений описываются степенью b матрицы (5). Матричный элемент, соответствующий не аннигиляции, равен

$$A_2 = \sqrt{\frac{[4]_q}{[2]_q}} \frac{q^b(q^{3b} - q^{-3b})}{[3]_q}. \quad (8)$$

Если подставить значение $q = e^{i\varphi}$ в эту формулу, получим следующее:

$$A_2 = \sqrt{8 \cos 2\varphi} \frac{e^{ib\varphi} \sin \varphi \sin 3b\varphi}{\sin 3\varphi} \quad (9)$$

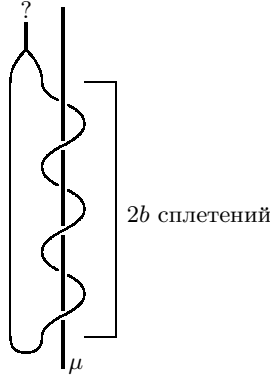


Рис. 5. Модифицированная процедура измерения с несколькими сплетениями одного из вспомогательных энионов с измеряемой косой. На рисунке изображен случай с $2b = 6$ сплетениями

Вероятность не аннигиляции максимальна как функция b при

$$3b\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n. \quad (10)$$

Так как мы хотим, чтобы и b , и k были целыми, существует две серии значений k , удовлетворяющих этому соотношению:

$$\begin{cases} \frac{6b\pi}{k+2} = \frac{\pi}{2} \implies k = 12b - 2, \\ \frac{6b\pi}{k+2} = \frac{3\pi}{2} \implies k = 4b - 2. \end{cases} \quad (11)$$

Все остальные серии, возникающие из формулы (10), являются подмножеством этих двух серий. Более того, первая из этих серий также является подмножеством второй. По этой причине мы будем рассматривать только вторую серию решений $k = 4b - 2$. Теперь найдем вероятность не аннигиляции вспомогательных энионов для этой серии. После подстановки значений k и $\varphi = \pi/2b$ в (9) получим

$$\begin{aligned} P_2 &= |A_2|^2 = 8 \cos \pi/b \left(\frac{\sin \pi/2b \sin 3\pi/2}{\sin 3\pi/2b} \right)^2 = \\ &= 8 \cos \pi/b \frac{1}{(\cos \pi/b + 2 \cos^2(\pi/2b))^2} = 8 \cos \pi/b \frac{1}{(2 \cos \pi/b + 1)^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Существует два значения b , для которых эта вероятность равна нулю, а именно $b = 1$ и 2 ; также для $b = 3$, $k = 10$ эта вероятность равна 1. После этого производная вероятности отрицательна, а значит, эта вероятность монотонно убывает. Но предел вероятности при $b \rightarrow \infty$ равен $8/9 \approx 0,89$. Таким образом, при $k = 4b - 2$, $b \geq 3$ вероятность того, что вспомогательные энионы не будут аннигилировать, выше чем $8/9 \approx 0,89$. Это означает, что мы можем отличить тривиальное представление от симметрического в измеряемой косе с вероятностью почти 90%. Эту вероятность также можно увеличить с помощью дополнительных измерений.

§ 5. Заключение

В данной статье мы обсудили возможность измерения топологического заряда нескольких энионов, которые летят вместе. Основная идея состоит в том, что из-за топологических свойств энионов топологический заряд, связанный с квантовыми состояниями топологического квантового компьютера, может быть измерен, не изменяя само состояние. Мы показали, что наилучшая теория для таких измерений – это $SU(2)$ -теория Черна – Саймонса уровня $k = 10$. Мы также предложили модификацию алгоритма измерения, которая упрощает измерение топологического заряда для теорий с уровнем $k = 4b - 2$.

Также возможно рассмотреть и более сложные конфигурации для измерения. Вспомогательные энионы могут быть запутаны с измеряемой косой, в том числе с включением пересечений траекторий вспомогательных энионов, что потенциально может сделать процедуру измерения еще более эффективной. Также возможно использовать вспомогательные энионы в старших представлениях. Возможно, рассмотрение таких энионов потребуется, если мы хотим различать больше представлений в измеряемой косе и делать это эффективно с помощью малого числа измерений. Наконец, интересно обобщить этот подход на случай группы $SU(N)$. Как нам кажется, это можно сделать напрямую с использованием методов, описанных в [9, 12–15].

Алгоритм измерения может быть применен к квантовым алгоритмам, особенно при рассмотрении квантовых компьютеров, основанных на измерениях или при желании ввести непрямые измерения в квантовые алгоритмы.

Автор благодарен С. Миронову и А. Пополитову за плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кутяев А.Ю. Квантовые вычисления: алгоритмы и исправление ошибок // УМН. 1997. Т. 52. № 6 (318). С. 53–112. <https://doi.org/10.4213/rm892>
2. Nayak C., Simon S.H., Stern A., Freedman M., Das Sarma S. Non-Abelian Anyons and Topological Quantum Computation // Rev. Mod. Phys. 2008. V. 80. № 3. P. 1083–1159. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.80.1083>
3. Rowell E.C. Braids, Motions and Topological Quantum Computing. <https://arxiv.org/abs/2208.11762> [quant-ph], 2022.
4. Melnikov D., Mironov A., Mironov S., Morozov A., Morozov An. Towards Topological Quantum Computer // Nucl. Phys. B. 2018. V. 926. P. 491–508. <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2017.11.016>
5. Kolganov N., Morozov An. Quantum $\mathcal{R}$ -Matrices as Universal Qubit Gates // Письма в ЖЭТФ. 2020. Т. 111. № 9. С. 623–624. <https://doi.org/10.31857/S1234567820090086>
6. Kolganov N., Mironov S., Morozov An. Large k Topological Quantum Computer // Nucl. Phys. B. 2023. V. 987. P. 116072 (17 pp.). <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2023.116072>
7. Levaillant C., Bauer B., Freedman M., Wang Z., Bonderson P. Universal Gates via Fusion and Measurement Operations on $SU(2)_4$ Anyons // Phys. Rev. A. 2015. V. 92. № 1. P. 012301 (17 pp.). <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.92.012301>
8. Mironov A., Morozov A., Morozov An. Character Expansion for HOMFLY Polynomials. II. Fundamental Representation. Up to Five Strands in Braid // J. High Energ. Phys. 2012. V. 2012. № 3. Article No. 34. [https://doi.org/10.1007/JHEP03\(2012\)034](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2012)034)
9. Анохина А.С., Морозов А.А. Процедура каблирования для раскрашенных полиномов ХОМФЛИ // ТМФ. 2014. Т. 178. № 1. С. 3–68. <https://doi.org/10.4213/tmf8588>
10. Anokhina A., Mironov A., Morozov A., Morozov An. Colored HOMFLY Polynomials as Multiple Sums over Paths or Standard Young Tableaux // Adv. High Energy Phys. 2013. V. 2013. Article ID 931830 (12 pp.). <https://doi.org/10.1155/2013/931830>

11. *Aharonov D., Jones V., Landau Z.* A Polynomial Quantum Algorithm for Approximating the Jones Polynomial // Proc. 38th Annu. ACM Symp. on Theory of Computing (STOC'06). Seattle, WA, USA. May 21–23, 2006. New York, NY, USA: ACM, 2006. P. 427–436. <https://doi.org/10.1145/1132516.1132579>
12. *Dhara S., Mironov A., Morozov A., Morozov An., Ramadevi P., Singh V.K., Sleptsov A.* Multi-colored Links from 3-Strand Braids Carrying Arbitrary Symmetric Representations // Ann. Henri Poincaré. 2019. V. 20. № 12. P. 4033–4054. <https://doi.org/10.1007/s00023-019-00841-z>
13. *Bai C., Jiang J., Liang J., Mironov A., Morozov A., Morozov An., Sleptsov A.* Quantum Racah Matrices up to Level 3 and Multicolored Link up to Invariants // J. Geom. Phys. 2018. V. 132. P. 155–180. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2018.05.020>
14. *Mironov A., Morozov A., Morozov An., Ramadevi P., Singh V.K., Sleptsov A.* Tabulating Knot Polynomials for Arborescent Knots // J. Phys. A: Math. Theor. 2017. V. 50. № 8. P. 085201 (22 pp.). <https://doi.org/10.1088/1751-8121/aa5574>
15. *Mironov A., Morozov A., Morozov An., Ramadevi P., Singh V.K.* Colored HOMFLY Polynomials of Knots Presented as Double Fat Diagrams // J. High Energ. Phys. 2015. V. 2015. № 7. Article No. 109 (68 pp.). [https://doi.org/10.1007/JHEP07\(2015\)109](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2015)109)

Морозов Андрей Алексеевич
 НИЦ “Курчатовский институт”, Москва
 Институт проблем передачи информации
 им. А.А. Харкевича РАН, Москва
andrey.morozov@itep.ru

Поступила в редакцию
 26.03.2024
 После доработки
 13.05.2024
 Принята к публикации
 17.05.2024