

УДК 621.391 : 519.216.3

© 2024 г. Н.Г. Докучаев

СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕЗАТУХАЮЩИХ СИГНАЛОВ
В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ И ЗАДАЧА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Изучается спектральное представление для дискретных по времени сигналов из ℓ_∞ , т.е. для ограниченных дискретных по времени сигналов, включая сигналы, не затухающие на $\pm\infty$. Это представление применено к проблеме предсказуемости и восстановления сигналов. С этой целью понятия передаточных функций, спектральных разрывов, ограниченности полосы и фильтров распространены на сигналы данного общего типа.

Ключевые слова: незатухающие сигналы, спектральное представление, передаточные функции, прогнозирование, восстановление данных.

DOI: 10.31857/S0555292324030045, EDN: WPDDTT

§ 1. Введение

Наиболее важные инструменты, используемые для обработки сигналов, основаны на представлении сигналов в частотной области. Это включает в себя, в частности, понятия передаточных функций, спектральных разрывов, фильтров, используемых для условий предсказуемости и восстанавливаемости данных.

Для сигналов в непрерывном времени $x(t)|_{t \in \mathbb{R}}$ спектральное представление осуществляется через преобразование Фурье для двусторонних процессов, затухающих при $t \rightarrow \pm\infty$, и через преобразование Лапласа для односторонних процессов, равных нулю на одной половине временной оси, но не обязательно затухающих на другой половине временной оси.

Аналогичная ситуация и для дискретных временных процессов $\{x(t)\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ и их спектрального представления через Z -преобразование. Для двусторонних дискретных процессов, стремящихся к нулю достаточно быстро на $\pm\infty$, таких как процессы из ℓ_2 , это Z -преобразование определено на единичной окружности $z \in \mathbb{C} : |z| = 1$. В случае ограниченных односторонних процессов $\{x(t)\}_{t=-\infty}^{+\infty}$, т.е. таких, что либо $x(t) = 0$ для $t < 0$, либо $x(t) = 0$ для $t > 0$, это Z -преобразование определено либо в области $z \in \mathbb{C} : |z| < 1$, либо в области $z \in \mathbb{C} : |z| > 1$.

Можно заметить, что любой ненулевой сигнал из ℓ_∞ может быть преобразован в сигнал из ℓ_1 без потери информации, например, заменой $x(t)$ на $e^{-|t|}x(t)$. Однако, по крайней мере для сигналов из ℓ_2 , такие преобразования представляют собой свертки на окружности $z \in \mathbb{C} : |z| = 1$ в частотной области со сглаживающими ядрами. К сожалению, такие преобразования устраняют вырождения спектра.

Стандартные методы прогнозирования и восстановления данных в обработке сигналов в основном основываются на предположениях о вырождении спектра. Следовательно, исключение незатухающих сигналов из спектральных методов может быть неудобным для практических реализаций; это потребует введения некоторых

искусственных предположений о реальных сигналах только для того, чтобы удовлетворить этим ограничениям. Этим мотивировано наше изучение спектрального представления и спектральных методов для общих типов незатухающих ограниченных сигналов.

Формально спектральное представление для ограниченных незатухающих дискретных во времени сигналов определяется как преобразование Фурье для псевдомер на $[-\pi, \pi]$, представленных как элементы пространства ℓ_∞ (см. [1, гл. III]). Однако это определение не приводит к частотным понятиям и методам, таким как фильтрация, предсказание и восстановление данных, применимым к незатухающим сигналам. В данной статье предлагается более конструктивное определение спектрального представления для незатухающих сигналов. На основе этого определения в статье расширяются понятия передаточных функций, каузальных передаточных функций, спектральных разрывов и фильтров для незатухающих сигналов (§3).

В частности, показано, что класс допустимых передаточных функций для незатухающих сигналов меньше, чем для сигналов из ℓ_2 , и что стандартные идеальные фильтры низких частот не могут быть напрямую применены к незатухающим сигналам. Далее, в статье представлены частотные условия предсказуемости для незатухающих сигналов с вырождением спектра в одной точке. Для этого используется адаптированная для незатухающих сигналов “предсказывающая” передаточная функция из [2], введенная для прогнозирования сигналов из ℓ_1 . В данной статье установлена применимость этих функций для незатухающих сигналов. Это может быть интересно, поскольку доказывает, что влияние прошлой истории незатухающих сигналов из ℓ_∞ уменьшается со временем, аналогично случаю сигналов из ℓ_1 .

Следует отметить, что гипотеза о вырождении спектра широко используется в теории обработки сигналов; однако было бы нереалистично ожидать, что реальный сигнал будет иметь вырождение спектра в чистой форме, учитывая шумовые искажения и пропуски выборок. Некоторая устойчивость предикторов из [2], используемых в данной статье, к шумовым искажениям и усечению выборок была установлена в [2]. Численные эксперименты для этих предикторов при работе с искажениями данных описаны в [3].

Наконец, в статье представлены результаты восстановления сигналов с разрывами в спектре определенного размера с неизвестным расположением (§4).

Расширенная версия настоящей статьи представлена в [4].

Некоторые обозначения. Обозначим через $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ множества всех целых, вещественных и комплексных чисел соответственно.

Пусть

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\},$$

$$\bar{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}.$$

Обозначим через ℓ_∞ множество всех процессов (сигналов) $x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, таких что

$$\|x\|_{\ell_\infty} := \sup_{t \in \mathbb{Z}} |x(t)| < +\infty.$$

Для $r \in [1, \infty)$ обозначим через ℓ_r множество всех процессов (сигналов) $x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, таких что

$$\|x\|_{\ell_r} := \left(\sum_{t \in \mathbb{Z}} |x(t)|^r \right)^{1/r} < +\infty.$$

Обозначим через $C([-\pi, \pi])$ стандартное линейное пространство непрерывных функций $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ с равномерной нормой $\|f\|_C := \sup_{\omega} |f(\omega)|$.

Обозначим через $W_2^1(-\pi, \pi)$ пространство Соболева функций $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, принадлежащих пространству $L_2(-\pi, \pi)$ вместе с обобщенными производными до первого порядка, таких что $f(-\pi) = f(\pi)$.

Для линейного нормированного пространства $\mathcal{X}$ обозначим через $\mathcal{X}^*$ его сопряженное пространство.

Обозначим через $\mathbb{I}$ индикаторную функцию.

§ 2. Спектральное представление процессов из ℓ_∞

Пусть $\mathcal{A}$ – пространство функций $f \in C([-\pi, \pi])$ с конечной нормой

$$\|f\|_{\mathcal{A}} := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|,$$

где

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega s} f(s) ds$$

– коэффициенты Фурье функции f . Другими словами, $\mathcal{A}$ – пространство абсолютно сходящихся рядов Фурье на $[-\pi, \pi]$. Благодаря выбору нормы это сепарабельное банахово пространство, изоморфное ℓ_1 .

Очевидно, что вложения

$$\mathcal{A} \subset C([-\pi, \pi]) \subset L_1([-\pi, \pi])$$

являются непрерывными. Отсюда следует, что вложения

$$L_1([-\pi, \pi])^* \subset C([-\pi, \pi])^* \subset \mathcal{A}^*$$

являются непрерывными.

Можно заметить, что существуют функции из $C([-\pi, \pi])$, которые не принадлежат пространству $\mathcal{A}$ (см., например, [5, с. 113]).

Мы предполагаем, что $X \in L_1([-\pi, \pi])$ представляет элемент сопряженного пространства $C([-\pi, \pi])^*$, такой что

$$\langle X, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) f(\omega) d\omega$$

для $f \in C([-\pi, \pi])$. Мы будем использовать это же обозначение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ для расширения этой билинейной формы на $\mathcal{A}^* \times \mathcal{A}$.

Предложение 1. Справедливы следующие утверждения:

1. Если $f \in \mathcal{A}$ и $g \in \mathcal{A}$, то $h = fg \in \mathcal{A}$ и $\|h\|_{\mathcal{A}} \leq \|f\|_{\mathcal{A}} \|g\|_{\mathcal{A}}$;
2. Вложение $W_2^1(-\pi, \pi) \subset \mathcal{A}$ является непрерывным.

Можно заметить, что двойственность между $\mathcal{A}$ и двойственным ему пространством $\mathcal{A}^*$ формально приводит к спектральному представлению

$$\langle X, f \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k) \hat{f}_k$$

для $X \in \mathcal{A}^*$ и $f \in \mathcal{A}$, где $\{\hat{f}_k\} \in \ell_1$ – ряд коэффициентов Фурье для f , аналогично [1, гл. III], где элементы $x \in \ell_\infty$ рассматривались как преобразования Фурье для псевдомер на $[-\pi, \pi]$. Для сигналов в непрерывном времени определение преобразования Фурье для $L_\infty(\mathbb{R})$ через подобную двойственность дано в [5, гл. VI]. Однако для целых, связанных с задачами восстанавливаемости и прогнозирования цифровых сигналов, нам понадобится прямое определение спектральных представлений для $x \in \ell_\infty$, основанное на следующей лемме.

Лемма 1. *Для любого $x \in \ell_\infty$ существует слабо* предельный элемент $X \in \mathcal{A}^*$ последовательности функций*

$$X_m(\omega) := \sum_{t=-m}^m e^{-i\omega t} x(t),$$

определенных на $[-\pi, \pi]$ для $m = 1, 2, \dots$. Этот элемент X таков, что

$$\|X\|_{\mathcal{A}^*} = \|x\|_{\ell_\infty}$$

и

$$\langle X, f \rangle = \sum_{t \in \mathbb{Z}} x(t) \hat{f}_t,$$

где $\hat{f}_k \in \ell_1$ является рядом коэффициентов Фурье для f .

Можно отметить, что в приведенной выше лемме

$$X_m \in L_1([-\pi, \pi]) \subset C([-\pi, \pi])^* \subset \mathcal{A}^*.$$

Зададим отображение $\mathcal{F}: \ell_\infty \rightarrow \mathcal{A}^*$ так, что $X = \mathcal{F}x$ для $x \in \ell_\infty$ является пределом в $\mathcal{A}^*$, введенным в лемме 1. Согласно лемме 1 это отображение линейно и непрерывно.

Зададим отображение $\mathcal{G}: \mathcal{A}^* \rightarrow \ell_\infty$, такое что

$$x(t) = \langle X, e^{i \cdot t} \rangle \quad \text{для } x = \mathcal{G}X, \quad X \in \mathcal{A}^*, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, что оператор $\mathcal{G}: \mathcal{A}^* \rightarrow \ell_\infty$ является линейным и непрерывным. Кроме того, $x_m(t) = x(t) \mathbb{I}_{|t| \leq m}$ для $x = \mathcal{G}X$ и $x_m := \mathcal{G}X_m$.

Теорема 1. *Отображения $\mathcal{F}: \ell_\infty \rightarrow \mathcal{A}^*$ и $\mathcal{G}: \mathcal{A}^* \rightarrow \ell_\infty$ являются непрерывными изометрическими биекциями, такими что $\mathcal{F} = \mathcal{G}^{-1}$ и $\mathcal{G} = \mathcal{F}^{-1}$.*

На этом основании мы будем использовать обозначение $\mathcal{F}^{-1}$ вместо $\mathcal{G}$. Мы рассматриваем $X = \mathcal{F}x \in \mathcal{A}^*$ как спектральное представление $x \in \ell_\infty$.

Замечание 1. Из леммы 1 следует, что для $x \in \ell_\infty$, $y \in \ell_1$ и $X = \mathcal{F}x$, $Y = \mathcal{F}y$ справедливо, что $Y \in \mathcal{A}$ и

$$\sum_{t \in \mathbb{Z}} x(t) y(t) = \langle X, Y \rangle.$$

Далее мы говорим, что $X \in \mathcal{A}^*$ является действительным (мнимым), если $\langle X, f \rangle$ является действительным (мнимым) для любого действительного $f \in \mathcal{A}$.

Очевидно, что любое $X \in \mathcal{A}^*$ допускает единственное представление $X = \bar{X} + i\tilde{X}$, где $\bar{X}, \tilde{X} \in \mathcal{A}^*$ являются действительными. Мы будем использовать обозначения $\text{Re } X$ для $\bar{X}$ и $\text{Im } X$ для $\tilde{X}$.

Будем говорить, что действительное $X \in \mathcal{A}^*$ является нечетным (четным), если $\langle X, f \rangle = 0$ для любого действительного четного (нечетного) $f \in \mathcal{A}$.

Легко показать, что если $x \in \ell_\infty$ является действительным, то $\operatorname{Re} X$ четно, а $\operatorname{Im} X$ нечетно для $X = \mathcal{F}x$; если $X \in \mathcal{A}^*$ является действительным и четным, то $\operatorname{Im} X = 0$.

Вырождение спектра. Введенное выше спектральное представление позволяет описывать сигналы из ℓ_∞ , имеющие спектральные разрывы, такие как полосовые процессы, а также более слабые типы вырождения спектра.

Определение 1. (i) Для измеримого по Борелю множества $D \subset [-\pi, \pi]$ с непустой внутренностью пусть $x \in \ell_\infty$ таково, что $\langle \mathcal{F}x, f \rangle = 0$ для любого $f \in \mathcal{A}$, такого что $f|_{[-\pi, \pi] \setminus D} \equiv 0$. В этом случае будем говорить, что D является спектральным разрывом для $x \in \ell_\infty$ и $X = \mathcal{F}X$.

(ii) Пусть Γ – некоторое множество, и пусть функция $G: [-\pi, \pi] \times \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ такова, что $G(\cdot, g) \in \mathcal{A}$ для каждого $g \in \Gamma$ и $\sup_{g \in \Gamma} \|G(\cdot, g)\|_{\mathcal{A}} = +\infty$. Пусть $x \in \ell_\infty$ таково, что $\sup_{g \in \Gamma} \|G(\cdot, g)X\|_{\mathcal{A}^*} < +\infty$. Тогда будем говорить, что сигнал x обладает вырождением спектра, компенсирующим G .

Пример 1. Пусть $r > 0$, $\Gamma = (0, 1)$ и $G(\omega, \nu) = (|\omega|^r + \nu)^{-1}$. Пусть $x \in \ell_1 \cap \ell_\infty$ таково, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{\omega \in [-\pi, \pi]} |X(\omega)|/G(\omega, 0) < +\infty$$

для $X = \mathcal{F}x$. Тогда x обладает вырождением спектра, компенсирующим G .

В приведенном выше примере соответствующее вырождение спектра является вырождением спектра в одной точке. Можно отметить, что $G(\cdot, \nu) \in \mathcal{A}$ для $\nu > 0$, поскольку $G(\cdot, \nu) \in \overset{p}{W}_2^1(-\pi, \pi)$.

Замечание 2. Из леммы 1 и замечания 1 следует, что $x \in \ell_\infty$ имеет спектральный разрыв $D \subset [-\pi, \pi]$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{t \in \mathbb{Z}} x(t)y(t) = 0$$

для любого $y \in \ell_1$, такого что $Y(\omega) = 0$ для $Y = \mathcal{F}y$ и $\omega \notin D$. Аналогично, сигнал $x \in \ell_\infty$ имеет вырождение спектра, компенсирующее G , как в определении 1(ii), тогда и только тогда, когда

$$\sup_{\nu > 0, \eta_g} \left| \sum_{t \in \mathbb{Z}} x(t)y(t) \right| < +\infty,$$

где $\eta_g = \mathcal{F}^{-1}(G(\cdot, g)Y_g)$ и $Y_g = \mathcal{F}y_g$.

§ 3. Применения для обработки сигналов

Введенное выше спектральное представление позволяет распространить некоторые стандартные инструменты обработки сигналов на случай сигналов из ℓ_∞ . В частности, оно позволяет характеризовать сигналы из ℓ_∞ , обладающие спектральными разрывами, такие как процессы с ограниченной полосой. Также оно поддерживает реализацию важных инструментов, таких как передаточные функции и фильтр нижних частот, и помогает получать алгоритмы прогнозирования и восстановления данных для этих сигналов.

3.1. Передаточные функции. Существующая теория не рассматривает передаточные функции, применяемые к общему типу двусторонних незатухающих сигналов процессов $x(t)$ из ℓ_∞ . Предложенное выше спектральное представление $x \in \ell_\infty$

через элементы из $\mathcal{A}^*$ позволяет реализовать передаточные функции для всех $x \in \ell_\infty$.

Определение 2. Пусть функция $H: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ такова, что функция $H(e^{i\cdot})$, определенная на $[-\pi, \pi]$, принадлежит $\mathcal{A}$. Тогда будем говорить, что $H(e^{i\cdot})$ является передаточной функцией на ℓ_∞ . Для $x \in \ell_\infty$ и $X = \mathcal{F}x$ определим $\hat{X} = HX \in \mathcal{A}^*$ и $\hat{x} = \mathcal{F}^{-1}\hat{X}$ таким образом, что

$$\langle \hat{X}, f \rangle := \langle X, H(e^{i\cdot})f \rangle.$$

Следует отметить, что согласно предложению 1(i) для любого $f \in \mathcal{A}$ также верно, что $H(e^{i\cdot})f \in \mathcal{A}$. Следовательно, $\hat{X} = HX$ корректно определено как элемент пространства $\mathcal{A}^*$.

Лемма 2. Пусть $H: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ такова, что $H(e^{i\cdot}) \in \mathcal{A}$, и пусть

$$H(e^{i\omega}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{h}_k e^{i\omega k},$$

где $\{\hat{h}_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell_1$. Пусть $X \in \mathcal{A}^*$, $\hat{X} = HX$ и $\hat{x} = \mathcal{F}^{-1}\hat{X}$. Тогда

$$\hat{x}(t) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} \hat{h}_{t-q} x(q).$$

Этот ряд абсолютно сходится равномерно на любом ограниченном множестве $x \in \ell_\infty$.

3.2. Фильтры. К сожалению, идеальные низкочастотные и высокочастотные фильтры с прямоугольным профилем передаточной функции не принадлежат пространству $\mathcal{A}$. Поэтому они не покрываются определением 2 передаточных функций, применимых к сигналам из ℓ_∞ . Тем не менее, некоторые аппроксимации этих идеальных фильтров могут быть достигнуты с использованием трапецеидальных передаточных функций из $\mathcal{A}$. Например, пусть

$$H_{p,q}(e^{i\omega}) := \mathbb{I}_{\omega \in [-p,p]} + \frac{q-\omega}{q-p} \mathbb{I}_{\omega \in (p,q]} + \frac{q+\omega}{q-p} \mathbb{I}_{\omega \in [-q,-p)},$$

где $0 < p < q < \pi$. Так как $W_2^1(-\pi, \pi) \subset \mathcal{A}$, функции $H_{p,q}(e^{i\cdot})$ принадлежат $\mathcal{A}$, следовательно, они являются допустимыми передаточными функциями на ℓ_∞ . Очевидно, что для любого $x \in \ell_\infty$ и $X = \mathcal{F}x$ функция $H_{p,q}X$ имеет спектральный разрыв на $(-\pi, -q) \cup (q, \pi]$; в этом смысле фильтрованный процесс $\hat{x} = \mathcal{F}^{-1}(H_{p,q}X)$ является процессом с ограниченной полосой.

При $q \rightarrow p+$ указанные функции аппроксимируют идеальный низкочастотный фильтр с полосой пропускания $[-p, p]$, т.е. с прямоугольной передаточной функцией $H_{p,p}(e^{i\omega}) = \mathbb{I}_{\omega \in [-p,p]}$. Как было указано выше, $H_{p,p}(e^{i\cdot}) \notin \mathcal{A}$, т.е. это не передаточная функция, применимая к сигналам из ℓ_∞ .

Замечание 3. Для любых $p > 0$ и $q > p$ и для $\Gamma = \{\nu : \nu > 0\}$ каждый сигнал x со спектральным разрывом $[-q, q]$ имеет вырождение спектра, компенсирующее $G(\omega, \nu) = \nu H_{p,q}(\omega)$.

3.3. Каузальные передаточные функции.

Определение 3. Будем говорить, что передаточная функция H , описанная в определении 2, является каузальной на ℓ_∞ , если для любого $\tau \in \mathbb{Z}$ и любого $x \in \ell_\infty$, такого что $x(t) = 0$ для всех $t < \tau$, выполняется $\hat{x}(\tau) = 0$, где $\hat{x} = \mathcal{F}^{-1}\hat{X}$ и $\hat{X} = HX$.

Отметим, что в приведенном выше определении $\hat{X} \in \mathcal{A}^*$.

Теорема 2. *Предположим, что функция $H: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ является непрерывной на $\mathbb{D}$ и аналитической на $\mathbb{D}$, и что $H(e^{i\cdot}) \in \mathcal{A}$. Тогда $H(e^{i\cdot})$ является передаточной функцией на ℓ_∞ , которая является каузальной в смысле определения 3.*

§ 4. Применения для задач восстановления данных и прогнозирования

Рассмотрим задачу восстановления ненаблюдаемых значений $x(t_k)|_{k \in \mathcal{M}}$ по наблюдаемым значениям $x(t_k)|_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{M}}$ для сигналов из некоторых подмножеств ℓ_∞ .

4.1. Восстановление конечного набора пропущенных значений. Пусть $D \subset [-\pi, \pi]$ – борелевское множество с непустой внутренностью. Обозначим через $\mathcal{V}(D)$ (или $\mathcal{V}_R(D)$, или $\mathcal{V}_I(D)$) множество всех сигналов $x \in \ell_\infty$, таких что $x = x_v + x_s$, где

- D является спектральным разрывом для $X_v = \mathcal{F}x_v$ (соответственно, для $\operatorname{Re} X_v$, или для $\operatorname{Im} X_v$);
- $X_s = \mathcal{F}x_s$ таково, что $X_s \in C([-\pi, \pi])^*$ – мера Радона на $[-\pi, \pi]$, сингулярная относительно меры Лебега.

В частности, соответствующие сигналы включают сигналы

$$x_s = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{i\omega_k t}$$

для всех последовательностей $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{Z}}^\infty \in \ell_1$. В этом случае

$$X_s = \mathcal{F}x_s = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \delta(\cdot - \omega_k),$$

где $\delta(\cdot - \omega_k)$ – дельта-функции, т.е. $\langle \delta(\cdot - \omega_k), f \rangle = f(\omega_k)$ для $f \in C([-\pi, \pi])$.

Очевидно, что $\mathcal{V}(D) \subset \mathcal{V}_R(D) \cap \mathcal{V}_I(D)$.

Теорема 3. *Для любого борелевского множества $D \subset [-\pi, \pi]$ с непустой внутренностью и любого конечного множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}$ значения $x(t)|_{t \in \mathcal{M}}$ для любого $x \in \mathcal{V}_R(D) \cup \mathcal{V}_I(D)$ однозначно определяются значениями $x(t)|_{t \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{M}}$.*

Теорема 3 формально подразумевает метод восстановления для $x|_{\mathcal{M}}$, так как тригонометрический многочлен

$$X_{\mathcal{M}}(\omega) = \sum_{t \in \mathcal{M}} e^{-it\omega} x(t)$$

наблюдаем на D в следующем смысле: для любого $f \in \mathcal{A}$, поддержанного на D , выполнено

$$\langle X_{\mathcal{M}}, f \rangle = -\langle X_{\mathbb{Z} \setminus \mathcal{M}}, f \rangle,$$

где $X_{\mathbb{Z} \setminus \mathcal{M}} := \mathcal{F}(\mathbb{I}_{\mathbb{Z} \setminus \mathcal{M}} x(\cdot))$. Однако это потребовало бы вычисления $X_{\mathbb{Z} \setminus \mathcal{M}}$, что кажется численно трудоемким.

Следующая теорема предлагает альтернативный подход, основанный на применении явно заданных каузальных передаточных функций и применимый к сигналам из более узкого класса $\mathcal{V}(D)$.

4.2. Задача прогнозирования. Пусть заданы $c > 0$ и $q > 1$. Для $\hat{\omega} \in (-\pi, \pi]$, $\nu \in (0, 1)$ определим

$$G(\omega, \hat{\omega}, \nu) := \exp \frac{c}{|e^{i\omega} - e^{i\hat{\omega}}|^q + \nu}.$$

Функции $G(\cdot, \hat{\omega}, \nu)$ принадлежат $W_2^1(-\pi, \pi)$ для любых $\hat{\omega}$ и ν . Таким образом, они принадлежат $\mathcal{A}$. Кроме того, $\|G(\cdot, \hat{\omega}, \nu)\|_{\mathcal{A}} \rightarrow +\infty$ для любого $\hat{\omega}$ при $\nu \rightarrow 0$.

Пусть $\mathcal{X}_{\hat{\omega}}$ – множество всех процессов $x \in \ell_{\infty}$ с точечным вырождением спектра в $\hat{\omega}$, компенсирующим G , т.е. таких, что

$$\|x\|_{\mathcal{X}_{\hat{\omega}}} := \sup_{\nu \in (0,1)} \|XG(\cdot, \hat{\omega}, \nu)\|_{\mathcal{A}^*} < +\infty, \quad X = \mathcal{F}x.$$

Рассмотрим $\mathcal{X}_{\hat{\omega}}$ как линейное нормированное пространство с соответствующей нормой.

В частности, это множество включает все процессы с любым спектральным разрывом $D \subset [-\pi, \pi]$ с непустой внутренностью, такой что $e^{i\hat{\omega}}$ принадлежит внутренней части дуги $\{e^{i\omega}\}_{\omega \in D}$.

Пусть задано $r \in (0, 1)$. Для всех $\gamma > 0$ определим

$$H_{\gamma}(z) := z \left(1 - \exp \left[-\frac{\gamma}{z + 1 - \gamma^{-r}} \right] \right). \quad (1)$$

Имеем $H_{\gamma}(e^{i\cdot}) \in W_2^1(-\pi, \pi) \subset \mathcal{A}$.

Теорема 4. *Функции $\{H_{\gamma}(e^{i\cdot})\}_{\gamma > 0} \subset \mathcal{A}$ являются каузальными передаточными функциями, определенными на ℓ_{∞} . При этом для любого $\hat{\omega} \in (-\pi, \pi]$ существует $\bar{\gamma} > 0$, такое что*

$$\sup_{t \in \mathbb{Z}} |x(t+1) - \hat{x}_{\gamma}(t)| \leq \varepsilon \quad \forall \gamma \geq \bar{\gamma}$$

для любого $x \in \mathcal{X}_{\hat{\omega}}$, такого что $\|x\|_{\mathcal{X}_{\hat{\omega}}} \leq 1$. Здесь

$$\hat{x}_{\gamma}(t) = e^{i(\hat{\omega}-\pi)t} \sum_{s \in \mathbb{Z}} h_{\gamma}(t-s) e^{i(\pi-\hat{\omega})s} x(s), \quad h_{\gamma} = \mathcal{F}^{-1} H_{\gamma}.$$

В [4] показано, что функции H_{γ} аппроксимируют $e^{i\omega}$ на $\mathbb{T}$ для $\omega \in (-\pi, \pi)$ при $\gamma \rightarrow +\infty$, т.е. они представляют собой одношаговый предиктор.

Эти передаточные функции были введены в [2] для прогнозирования сигналов из ℓ_1 . Некоторые численные эксперименты для этих предикторов с различными значениями r были описаны в [3].

4.3. Восстановимость данных в случае неизвестного спектрального зазора. Для $\Omega > 0$ пусть $\mathcal{U}(\Omega)$ (или $\mathcal{U}_R(\Omega)$, или $\mathcal{U}_I(\Omega)$) обозначает множество всех сигналов $x \in \ell_{\infty}$, таких что для каждого x существует борелевское измеримое множество $D = D(x(\cdot)) \subset [-\pi, \pi]$, такое что $\text{mes } D \geq \Omega$ и $x \in \mathcal{V}(D)$ (или $\mathcal{V}_R(D)$, или $\mathcal{V}_I(D)$, соответственно). Очевидно, что $\mathcal{U}(\Omega) \subset \mathcal{U}_R(\Omega) \cap \mathcal{U}_I(\Omega)$.

Пусть $[r]$ обозначает целую часть числа $r > 0$, а $|\mathcal{M}|$ обозначает количество элементов множества $\mathcal{M}$.

Теорема 5. *Для любого конечного множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}$, для любого $x \in \mathcal{U}_R(\Omega) \cup \mathcal{U}_I(\Omega)$, для заданного множества наблюдений $x(t)|_{t \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{M}}$ количество возможных различных упорядоченных множеств $\{x(t)\}_{t \in \mathcal{M}}$ не может превышать $N := \lfloor 2\pi/\Omega \rfloor$.*

Следует отметить, что в теореме 5 оценка возможного количества значений в $\mathbb{C}^{|\mathcal{M}|}$ для ненаблюдаемого вектора $\{x(t)\}_{t \in \mathcal{M}}$ не зависит от $\mathcal{M}$ или $|\mathcal{M}|$.

В частности, если $\Omega > \pi/2$, то вектор $\{x(t)\}_{t \in \mathcal{M}}$ однозначно определяется наблюдениями $x(t)|_{t \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{M}}$. Если $\Omega > \pi/4$, то вектор $\{x(t)\}_{t \in \mathcal{M}}$ может принимать не

более двух возможных значений в $\mathbb{C}^M$ для любого заданного множества наблюдений $x(t)|_{t \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{M}}$.

Доказательства результатов можно найти в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kahane J.-P.* Séries de Fourier absolument convergentes. Berlin: Springer, 1970. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-59158-1>
2. *Dokuchaev N.* Predictors for Discrete Time Processes with Energy Decay on Higher Frequencies // IEEE Trans. Signal Process. 2012. V. 60. № 11. P. 6027–6030. <https://doi.org/10.1109/TSP.2012.2212436>
3. *Dokuchaev N.* Near-ideal Causal Smoothing Filters for the Real Sequences // Signal Process. 2016. V. 118. № 1. P. 285–293. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2015.07.002>
4. *Dokuchaev N.G.* Spectral Representation of Two-Sided Signals from ℓ_∞ and Applications to Signal Processing // Probl. Inf. Transm. 2024. V. 60. № 2. P. 113–126. <https://doi.org/10.1134/S0032946024020030>
5. *Katznelson Y.* An Introduction to Harmonic Analysis. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2004. <https://doi.org/10.1017/CB09781139165372>

Докучаев Николай Геннадьевич
Институт ZJU-UIUC (Чжэцзянский университет –
Иллинойский университет в Урбане-Шампейне),
Чжэцзянский университет, Хайнин,
провинция Чжэцзян, Китай
Dokuchaev@intl.zju.edu.cn

Поступила в редакцию
23.12.2023
После доработки
14.09.2024
Принята к публикации
11.10.2024