

УДК 621.391 : 519.725

© 2024 г. П.В. Трифонов, Г.А. Трофимок

**ПОСТРОЕНИЕ ПОЛЯРНЫХ КОДОВ
С БОЛЬШИМИ ДВОИЧНЫМИ ЯДРАМИ^{1,2}**

Предложены методы для вычисления пропускной способности и параметров Бхаттачарьи битовых подканалов, задаваемых двоичным поляризующим преобразованием с большими ядрами. Верхние и нижние границы, связывающие пропускную способность и параметр Бхаттачарьи канала, используются для уточнения полученных оценок. Полученные оценки могут быть использованы для выбора множества замораживания в конструкции полярных кодов. Кроме того, представлен метод поиска оптимальной последовательности ядер в полярных кодах со смешанными ядрами.

Ключевые слова: полярные коды, большие ядра, полярные подкоды.

DOI: 10.31857/S0555292324040028, **EDN:** MEWIDB

§ 1. Введение

Открытие Э. Ариканома явления поляризации привело к созданию полярных кодов, которые позволяют достичь симметричной пропускной способности дискретного канала W без памяти с двоичным входом, а также обладают алгоритмами построения, кодирования и декодирования малой сложности [2]. Полярные коды были включены в стандарт беспроводной связи 5G. Полярные коды также можно применять в каналах множественного доступа и каналах ретрансляции [3–5].

Однако классическая конструкция Арикано поляризует канал довольно медленно. Поэтому для кодов практически применимой длины приходится передавать некоторые информационные символы по битовым подканалам посредственного качества. Это приводит к низкой корректирующей способности таких полярных кодов при декодировании методом последовательного исключения (ПИ). Улучшенные кодовые конструкции, такие как полярные коды с циклическим контролем по избыточности [6] и полярные подкоды [7, 8], для получения хорошей корректирующей способности требуют списочного ПИ-декодирования (СПИ-декодирования) с большим размером списка. Альтернативный подход – это использовать технику последовательного декодирования, что позволяет добиться корректирующей способности, близкой к корректирующей способности СПИ-декодера, с гораздо меньшей сложностью [9–11].

Ситуация значительно улучшается, если заменить матрицу Арикано размера 2×2 , называемую ядром, на более крупную. Было показано, что полярные коды с достаточно большими ядрами обеспечивают более высокую скорость поляризации [12, 13] и достигают оптимальной экспоненты масштабирования [14, 15]. Более того, в некоторых случаях сложность СПИ-декодирования, необходимого полярным

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00208.

² В статье расширяются результаты, представленные в [1].

подкодам с большим ядром для достижения определенной требуемой корректирующей способности, ниже, чем в случае кодов с ядром Арикаана [16].

Полярные коды с ядром Арикаана можно строить с помощью метода эволюции плотности [17, 18], гауссовской аппроксимации [19], рекурсии двоичного стирающего канала [2], или моделирования по методу Монте-Карло [20]. Для больших ядер описаны только два последних метода, за исключением случая ядер, полученных из матрицы Арикаана [21]. Однако коды, построенные для двоичного стирающего канала [22], могут оказаться не оптимальными для АБГШ-канала, что на практике гораздо важнее.

В настоящей статье представлен приближенный метод вычисления пропускной способности и параметров Бхаттачарьи битовых подканалов, индуцированных двоичным поляризующим преобразованием, для АБГШ-канала с двоичной фазовой манипуляцией. Показано, что этот метод можно использовать не только для выбора замороженного множества для полярных кодов, но и для поиска оптимальной последовательности ядер в конструкции полярных кодов со смешанными ядрами. Предлагаемый подход опирается на семейство функций, зависящих от ядра, которые строятся однократно для каждого ядра методом Монте-Карло, а затем используются для построения кодов с произвольной комбинацией ядер с весьма низкой сложностью.

Статья построена следующим образом. В § 2 приводятся некоторые сведения о полярных кодах. В § 3 изложен предлагаемый подход к оценке надежности битовых подканалов. В § 4 изучается применение предложенного метода к вопросу упорядочивания ядер в полярных кодах со смешанными ядрами. Результаты моделирования представлены в § 5.

Расширенная версия данной статьи представлена в [23].

§ 2. Необходимые сведения

2.1. Полярные коды. Поляризующее преобразование задается матрицей

$$A = \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{K}_m,$$

где $\mathcal{K}_i$ – ядра поляризации размера l_i , т.е. невырожденные $(l_i \times l_i)$ -матрицы, которые перестановками столбцов нельзя перевести в верхнетреугольные [12]. Можно показать, что симметричный канал без памяти с двоичным входом

$$\mathbf{W}(y|c) = \mathbf{W}_0^{(0)}(y|c)$$

вместе с матрицей A порождает $n = \prod_{i=1}^m l_i$ битовых подканалов

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_m^{(i)}(y_0^{n-1}, u_0^{i-1} | u_i) &= \mathbf{W}_{m,A}^{(i)}(y_0^{n-1}, u_0^{i-1} | u_i) = \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{u_{i+1}^{n-1} \in \mathbb{F}_2^{n-i-1}} \prod_{j=0}^{n-1} \mathbf{w}_0^{(0)}(y_j | (u_0^{n-1}A)_j). \end{aligned} \quad (1)$$

Если все подканалы $\mathcal{K}_i$ одинаковы, то при стремлении m к бесконечности пропускные способности этих подканалов сходятся к 0 и 1, а доля бесшумных подканалов приближается к пропускной способности C канала $\mathbf{W}$ [12]. На практике может оказаться целесообразным использовать конструкции со смешанными ядрами, т.е. задавать $\mathcal{K}_i$ различными матрицами [24].

Полярный (n, k) -код над $\mathbb{F}_2$ – это множество кодовых слов $c_0^{n-1} = u_0^{n-1}A$, где $u_i = 0, i \in \mathcal{F}, \mathcal{F} \subset [n]$ – множество замораживания, $[n] = \{0, 1, \dots, n-1\}$ и $|\mathcal{F}| = n-k$.

В классической конструкции полярных кодов предполагается, что $\mathcal{F}$ – множество индексов подканалов $\mathbf{W}_m^{(i)}$ с наименьшими значениями пропускной способности.

Удобно рассматривать вероятности

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_m^{(i)}(u_0^i | y_0^{n-1}) &= \sum_{u_{i+1}^{n-1}} \mathbf{W}_m^{(n-1)}(u_0^{n-1} | y_0^{n-1}) = \\ &= \sum_{u_{i+1}^{n-1}} \mathbf{W}_m^{(n-1)}(y_0^{n-1} | u_0^{n-1}) \frac{P\{u_0^{n-1}\}}{W(y_0^{n-1})} = \frac{2^{-n}}{W(y_0^{n-1})} \sum_{u_{i+1}^{n-1}} \prod_{i=0}^{n-1} \mathbf{W}(y_i | (u_0^{n-1} A)_i) = \\ &= \underbrace{\frac{\prod_{i=0}^{n-1} W(y_i)}{W(y_0^{n-1})}}_{\alpha} \sum_{u_{i+1}^{n-1}} \prod_{i=0}^{n-1} \mathbf{W}((u_0^{n-1} A)_i | y_i), \end{aligned} \quad (2)$$

где α – нормирующий множитель, а $W(y)$ – плотность вероятности на выходе канала. Эти вероятности можно вычислить рекуррентно как

$$\mathbf{W}_p^{(l_p i + s)}(u_0^{l_p i + s} | y_0^{L_p - 1}) = \alpha' \sum_{u_{l_p i + s + 1}^{l_p(i+1)-1}} \prod_{j=0}^{l_p - 1} \mathbf{W}_{p-1}^{(i)}(v_{0j}, \dots, v_{ij} | y_{j, l_p}^{L_p - 1}), \quad (3)$$

где $v_{tj} = (u_{l_p t}^{l_p(t+1)-1} \mathcal{K}_p)_j$, $L_p = \prod_{j=1}^p l_j$ – размер поляризующего преобразования, полученного на p -м уровне,

$$y_{j,l}^{n-1} = (y_j, y_{j+l}, \dots, y_{j+n-l}), \quad 0 < p \leq m, \quad 0 \leq i < L_{p-1}, \quad 0 \leq s < l_p,$$

а α' – еще один нормирующий множитель. Эта операция известна как обработка ядра, или маргинализация ядра [25, 26]. Вычисление этого выражения сводится к мягкому декодированию в смежном классе по несистематическому линейному коду $\mathcal{C}_i$, порожденному строками $i, \dots, l_p - 1$ матрицы $\mathcal{K}_p$. Его можно реализовать, используя алгоритм типа BCJR (Bahl, Cocke, Jelinek, Raviv) над расширенной кодовой решеткой этого кода [27]. Удобно определить логарифмическое отношение правдоподобия (ЛЮП)

$$\mathbf{L}_p^{(i)}(u_0^{i-1}, y_0^{L_p - 1}) = \log \frac{\mathbf{W}_p^{(i)}(u_0^{i-1}, 0 | y_0^{L_p - 1})}{\mathbf{W}_p^{(i)}(u_0^{i-1}, 1 | y_0^{L_p - 1})}. \quad (4)$$

Декодирование полярных кодов можно реализовать с помощью ПИ-алгоритма, принимающего решения

$$\hat{u}_i = \begin{cases} \arg \max_{u_i \in \mathbb{F}_2} \mathbf{W}_m^{(i)}(\hat{u}_0^{i-1}, u_i | y_0^{n-1}), & i \notin \mathcal{F}, \\ \text{замороженное значение } u_i, & i \in \mathcal{F}. \end{cases} \quad (5)$$

В [10] было предложено заменить сумму в (2) и (3) максимальным членом, т.е. рассматривать вероятности

$$\widetilde{\mathbf{W}}_p^{(l_p j + i)}(u_0^{l_p i + s} | y_0^{L_p - 1}) = \max_{u_{l_p i + s + 1}^{l_p(i+1)-1}} \prod_{j=0}^{l_p - 1} \mathbf{W}_{p-1}^{(i)}(v_{0j}, \dots, v_{ij} | y_{j, l_p}^{L_p - 1}).$$

Эти вероятности можно использовать для аппроксимации $\mathbf{W}_m^{(j)}(u_0^j | y_0^{N-1})$ в алгоритме ПИ-декодирования. Еще один подход состоит в том, чтобы использовать приближенные значения ЛОПП

$$\mathcal{L}_p^{(i)}(u_0^{i-1}, y_0^{L_p-1}) = \log \frac{\widetilde{\mathbf{W}}_p^{(i)}(u_0^{i-1}, 0 | y_0^{L_p-1})}{\widetilde{\mathbf{W}}_p^{(i)}(u_0^{i-1}, 1 | y_0^{L_p-1})}. \quad (6)$$

Для вычисления этих значений имеются быстрые точные и приближенные алгоритмы обработки ядра [10, 16, 28–30]. Можно показать, что соответствующие алгоритмы декодирования обеспечивают очень хороший компромисс между корректирующей способностью и сложностью [31].

2.2. Параметр Бхаттачарьи. Надежность битовых подканалов $\mathbf{W}_\lambda^{(i)}$ удобно характеризовать их параметрами Бхаттачарьи $Z_{\lambda,i}$.

Симметричная пропускная способность I и параметр Бхаттачарьи Z симметричного канала без памяти с двоичным входом удовлетворяют неравенствам [2]

$$\log_2 \frac{2}{1+Z} \leq I \leq \sqrt{1-Z^2}. \quad (7)$$

Более точная оценка дана в [32, формула (23)]:

$$\widetilde{I}(Z) = 1 - Z \leq I \leq \widehat{I}(Z), \quad (8)$$

где величина $\widehat{I}(Z)$ такова, что $B(1, \widehat{I}(Z)) = \frac{Z+1}{2}$,

$$B(\rho, C) = \frac{\left((h^{-1}(1-C))^{\frac{1}{1+\rho}} + (1-h^{-1}(1-C))^{\frac{1}{1+\rho}} \right)^{1+\rho}}{2^\rho}$$

и $h(p) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$. Это выражение можно упростить, получая

$$\widehat{I}(Z) = 1 - h \left(\frac{Z^2}{2(1 + \sqrt{1-Z^2})} \right).$$

Альтернативный вариант – переписать (8) в виде

$$\underbrace{1-I}_{\widetilde{Z}(I)} \leq Z \leq \underbrace{2\sqrt{h^{-1}(1-I)(1-h^{-1}(1-I))}}_{\widehat{Z}(I)}. \quad (9)$$

Выражения для параметров Бхаттачарьи битовых подканалов, индуцированных поляризационной матрицей Арикана, были получены в [33].

2.3. Показатели качества ядра. Говорят, что ядро $\mathcal{K}$ имеет скорость поляризации (называемую также экспонентой ошибки) $E(\mathcal{K})$, если параметры Бхаттачарьи $Z_m^{(i)}$ битовых подканалов, индуцированных матрицей $\mathcal{K}^{\otimes m}$, удовлетворяют следующим условиям [12]:

- Для любого фиксированного $\beta < E(\mathcal{K})$ выполнено равенство

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \Pr[Z_n \leq 2^{-\ell^{n\beta}}] = C;$$

- Для любого фиксированного $\beta > E(\mathcal{K})$ выполнено равенство

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \Pr[Z_n \geq 2^{-\ell^{n\beta}}] = 1.$$

Скорость поляризации можно вычислить как

$$E(\mathcal{K}) = \frac{1}{l} \sum_{i=0}^{l-1} \log_l D_i,$$

где D_i – i -е частичное расстояние для $\mathcal{K}$, т.е. минимальное расстояние Хэмминга между i -й строкой матрицы $\mathcal{K}$ и линейным пространством, образованным строками $i+1, \dots, l-1$ из $\mathcal{K}$ [12]. Вероятность ошибки ПИ-декодирования для полярного кода со скоростью $\frac{k}{n} < C$ удовлетворяет неравенству

$$P_{SC} \leq 2^{-n^\beta}, \quad \beta < E(K).$$

Экспонента масштабирования μ для семейства корректирующих кодов со скоростью R определяет длину $n = O((C - R)^{-\mu})$ наиболее короткого кода из этого семейства, с помощью которого можно передавать информацию по каналу с пропускной способностью C с заданной вероятностью ошибки. Численный метод нахождения экспоненты масштабирования для ядра двоичного стирающего канала приведен в [34].

2.4. Построение множества замораживания. Множество замораживания $\mathcal{F}$ для полярных кодов обычно выбирается как множество индексов i наименее надежных битовых подканалов $\mathbf{W}_m^{(i)}$. Если исходный канал $\mathbf{W}_0^{(0)}$ – это двоичный стирающий канал, то все $\mathbf{W}_m^{(i)}$ также таковы, и их пропускные способности можно узнать через поляризационное поведение соответствующих ядер [22, 35, 36]. Кроме того, для оценки вероятностей ошибок в этих подканалах можно использовать моделирование методом Монте-Карло ПИ-декодера с участием джинна [2]. Сложность такого подхода составляет $O(Tn \log n)$ операций обработки ядра, где $T = \frac{\tau}{p}$ – число итераций метода Монте-Карло, p – вероятность ошибки в наименее надежном подканале, соответствующем незамороженному символу, а τ – достаточно большое целое число.

В случае полярных кодов с ядром Арикана можно вычислить ухудшенные и улучшенные приближения $\mathbf{W}_m^{(i)}$, а также их параметры Бхаттачарьи, с произвольно хорошей точностью и полиномиальной сложностью [18]. Также можно вычислить плотности вероятностей $\mathbf{L}_p^{(i)}(0, y_0^{L_p-1})$ или $\mathcal{L}_p^{(i)}(0, y_0^{L_p-1})$ в предположении передачи нулевого кодового слова [17, 37]. Поляризационная конструкция с весами, введенная в [38], позволяет получать коды с высокой эффективностью при списочном ПИ-декодировании. К сожалению, эти методы пока не были распространены на случай больших ядер, поскольку в общем случае крайне сложно охарактеризовать распределение ЛОПП $\mathbf{L}_p^{(i)}$ или $\mathcal{L}_p^{(i)}$.

Метод гауссовской аппроксимации был предложен в [19] для случая полярных кодов с ядром Арикана. В работе [21] он был распространен на случай некоторых других подобных ядер.

2.5. Полярные подкоды. Известно, что классические полярные коды имеют довольно низкие минимальные расстояния [39]. Их эффективность при СПИ-декодировании можно существенно улучшить, заменив статические ограничения замораживания на символы $u_i = 0$, $i \in \mathcal{F}$, динамическими ограничениями

$$u_i = \sum_{j < i} V_{s_i, j} u_j, \quad i \in \mathcal{F}, \tag{10}$$

где V – матрица ограничений размера $(n - k) \times n$, в которой различные строки заканчиваются³ в различных столбцах $i \in \mathcal{F}$, а s_i – номер строки, заканчивающейся в столбце i . При таких ограничениях из классического полярного кода исключаются многие кодовые слова с малым весом. Символы u_i с хотя бы одним слагаемым в правой части (10) называются динамически замороженными, а символы с $V_{s_i, j} = 0$, $j < s_i$, – статически замороженными. Полученные коды называются полярными подкодами. Алгебраическая конструкция полярных подкодов была представлена в [7]. Она позволяет получить коды с улучшенным минимальным расстоянием. Однако на практике более хорошие характеристики получаются при использовании рандомизированных конструкций [8, 40–42].

В [1] была предложена рандомизированная конструкция полярных подкодов с большими ядрами. Пусть $(\mathcal{D}_0, \dots, \mathcal{D}_{n-1})$ – частичный профиль расстояний матрицы A . Множество замораживания для рандомизированного полярного (n, k) -подкода определяется как

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_A \cup \mathcal{F}_B,$$

где $\mathcal{F}_0$ – множество индексов $n - k - t_A - t_B$ наименее надежных битовых подканалов $\mathbf{W}_m^{(i)}$, $\mathcal{F}_A$ – множество из t_A максимальных индексов в $[n] \setminus \mathcal{F}_0$ с наименьшим $\mathcal{D}_i$ (динамически замороженные символы типа А), $\mathcal{F}_B$ – множество индексов $i \in [n] \setminus (\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_A)$ наименее надежных битовых подканалов $\mathbf{W}_m^{(i)}$ (динамически замороженные символы типа В), t_A и t_B – параметры конструкции. Коэффициенты $V_{s_i, j}$, $i \in \mathcal{F}_0$, $j \neq i$, полагаются равными 0 (статически замороженные символы), а остальные выбираются как независимые равновероятные двоичные значения. Оптимальные значения параметров t_A и t_B обычно получают путем моделирования.

Такая конструкция гарантирует, что код имеет достаточно низкую вероятность ошибки ПИ-декодирования, а также позволяет избежать большинства кодовых слов малого веса. Это позволяет полярным подкодам обеспечить хорошую корректирующую способность при использовании алгоритма списочного декодирования Талая – Варди [6]. Другой способ получения кодов с улучшенными характеристиками – использовать предварительное сверточное кодирование [43–45].

Заметим, что использование динамически замороженных символов не влияет на вероятность ошибки в битовых подканалах, если декодер следует по правильному пути, поэтому методы, разработанные для оценки надежности битовых подканалов для классических полярных кодов, можно непосредственно перенести на случай полярных подкодов.

§ 3. Оценка надежности битовых подканалов

В этом параграфе мы опишем несколько методов оценки надежности битовых подканалов и, объединяя их, получим новый метод построения полярных кодов с большими ядрами.

3.1. Пропускные способности кодированных каналов. Рассмотрим случай $m = 1$ и ядра $\mathcal{K}_1 = K$ размерности l . Рассмотрим битовый подканал

$$\mathbf{W}_1^{(i)}(Y_0^{l-1}, U_0^{i-1} | U_i) = \frac{1}{2^{l-1}} \sum_{u_{i+1}^{l-1}} \mathbf{W}(Y_0^{l-1} | U_0^{l-1} K),$$

³ Для заданного двоичного вектора a_0^{n-1} мы говорим, что он заканчивается в позиции j , если $a_j = 1$ и $a_t = 0$, $j < t < n$.

индуцированный некоторым ядром K размера $l \times l$ и двоичным входным каналом $\mathbf{W}(Y|C)$, где

$$\mathbf{W}(Y_0^{l-1}|C_0^{l-1}) = \prod_{i=0}^{l-1} \mathbf{W}(Y_i|C_i),$$

а U_i, C_i, Y_i – случайные величины, отвечающие входным значениям поляризующего преобразования, входным и выходным символам канала, соответственно. Взаимная информация для $\mathbf{W}_1^{(i)}$ определяется следующим образом:

$$\mathbb{I}_i = I(Y_0^{l-1}, U_0^{i-1}; U_i) = I(Y_0^{l-1}; U_i | U_0^{i-1}) + I(U_0^{i-1}; U_i).$$

Поскольку случайные величины U_j , $0 \leq j < l$, предполагаются независимыми, последнее слагаемое равно 0. Далее, согласно правилу сложения для взаимной информации получаем

$$\mathbb{I}_i = I(Y_0^{l-1}; U_i | U_0^{i-1}) = I(Y_0^{l-1}; U_i^{l-1} | U_0^{i-1}) - I(Y_0^{l-1}; U_{i+1}^{l-1} | U_0^i). \quad (11)$$

Для симметричного канала $\mathbf{W}_0^{(0)}$ величина $I(Y_0^{l-1}; U_i^{l-1} | U_0^{i-1})$ не зависит от значений U_0^{i-1} , и эти значения можно считать равными 0. Действительно, значения U_0^{i-1} задают смежный класс по коду $\mathcal{C}_i$, порожденному строками $i, \dots, l-1$ ядра K . Для симметричного канала существует перестановка $\pi(c)$, такая что $\pi = \pi^{-1}$ и $\mathbf{W}(y|0) = \mathbf{W}(\pi(y)|1)$. Отсюда следует, что для фиксированного смежного класса можно применить обратимое преобразование на выходе канала и получить эквивалентный выход канала, соответствующий передаче кодового слова из $\mathcal{C}_i$.

Тогда

$$I_i = I(Y_0^{l-1}; U_i^{l-1} | U_0^{i-1} = 0)$$

становится пропускной способностью канала, состоящего из кодера $\mathcal{C}_i$ и исходного канала $\mathbf{W}_0^{(0)}$.

Из определения взаимной информации следует, что

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_i &= 2^{i-l} \times \\ &\times \int_{y_0^{l-1} \in \mathbb{R}^l} \sum_{u_i^{l-1} \in \mathbb{F}_2^{l-i}} \mathbf{W}(y_0^{l-1} | u_i^{l-1} K^{(i)}) \log_2 \frac{2^{l-i} \mathbf{W}(y_0^{l-1} | u_i^{l-1} K^{(i)})}{\sum_{v_i^{l-1} \in \mathbb{F}_2^{l-i}} \mathbf{W}(y_0^{l-1} | v_i^{l-1} K^{(i)})} dy_0^{l-1} = \\ &= l - i + \int_{y_0^{l-1} \in \mathbb{R}^l} \mathbf{W}(y_0^{l-1} | 0) \log_2 \frac{\mathbf{W}(y_0^{l-1} | 0)}{\sum_{c' \in \mathcal{C}_i} \mathbf{W}(y_0^{l-1} | c')} dy_0^{l-1}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $K^{(i)}$ – матрица, состоящая из строк $i, \dots, l-1$ матрицы K . В следующих пунктах описаны методы, которые можно использовать для вычисления $\mathbb{I}_i$ для некоторых каналов. Как и можно было бы ожидать, эти выражения основаны на совершенно разных свойствах ядра K для разных типов исходного канала. Влияние этих различий изучается в § 5.

Двоичный симметричный канал. Рассмотрим случай, когда $\mathbf{W}_0^{(0)}$ – двоичный симметричный канал с переходной вероятностью p . В [46, 47] было показано, что в этом случае

$$I(Y_0^{l-1}; U_i^{l-1} | U_0^{i-1} = 0) = l - i + H(R_i) - nh(p),$$

где $h(p)$ – функция двоичной энтропии, а $H(R_i)$ – энтропия случайной величины, соответствующей строке из стандартной таблицы Слепяна, содержащей выходной вектор канала. Ее можно вычислить следующим образом:

$$H(R_i) = - \sum_{j=1}^{2^i} P_{ij} \log(P_{ij}),$$

где

$$P_{ij} = \sum_{s=0}^l w_i(j, s) p^s (1-p)^{l-s},$$

а $w_i(j, s)$ – число векторов веса s в j -й строке таблицы стандартной расстановки (т.е. в j -м смежном классе) для кода $\mathcal{C}_i$. Отсюда получаем

$$\mathbb{I}_i = 1 + H(R_i) - H(R_{i+1}).$$

Это позволяет вычислить пропускные способности подканалов поляризующего преобразования с одним уровнем поляризации. К сожалению, полученные подканалы не являются двоичными симметричными, поэтому этот подход невозможно обобщить на многоуровневое поляризующее преобразование с $m > 1$. Вычисление полного распределения веса всех смежных классов линейного кода также представляет собой достаточно интересную задачу.

Этот подход можно было бы применить ко всей матрице A , если найти способ вычисления соответствующих значений $w_i(j, s)$ с разумной сложностью.

Двоичный стирающий канал. Если $\mathbf{W}$ – двоичный стирающий канал с вероятностью стирания $Z_{0,0}$, то все подканалы $\mathbf{W}_p^{(i)}$ также являются таковыми [22]. Следовательно, их пропускные способности можно вычислить как $I_{p,i} = 1 - Z_{p,i}$, где $Z_{p,i}$ – соответствующий параметр Бхаттачарьи, т.е. вероятность стирания. Эту величину можно найти как

$$Z_{p,li+j} = \sum_{s=1}^l B_s^{(j)} Z_{p-1,i}^s (1 - Z_{p-1,i})^{l-s}, \quad 0 < p \leq m,$$

где $B_s^{(j)}$ – число конфигураций стирания веса s , в результате которых 0-й информационный символ кода $\mathcal{C}_j$ невозможно восстановить. Эффективные алгоритмы для вычисления этих величин приведены в [22, 35, 36].

АБГШ-канал. Для каналов общего вида точная оценка (12) не представляется возможной. Однако на случай полярных кодов можно распространить полуаналитический метод EXIT-функций (extrinsic information transfer), который с большим успехом используется для построения МПП-кодов и турбокодов [48].

Из (11) получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_i &= I(Y_0^{l-1}, U_0^{i-1}; U_i) = 1 + \int_{y_0^{l-1} \in \mathbb{R}^l} \mathbf{W}(y_0^{l-1} | 0) \log_2 \frac{\sum_{c \in \mathcal{C}_{i+1}} \mathbf{W}(y_0^{l-1} | c)}{\sum_{c' \in \mathcal{C}_i} \mathbf{W}(y_0^{l-1} | c')} dy_0^{l-1} = \\ &= 1 - \int_{y_0^{l-1} \in \mathbb{R}^l} \mathbf{W}(y_0^{l-1} | 0) \log_2 (1 + 1/\mathcal{R}_i(y_0^{l-1})) dy_0^{l-1}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\mathcal{R}_i(y_0^{l-1}) = \frac{\sum_{c \in \mathcal{C}_i^{(0)}} \mathbf{W}(y_0^{l-1} | c)}{\sum_{c' \in \mathcal{C}_i^{(1)}} \mathbf{W}(y_0^{l-1} | c')} = \frac{\sum_{c \in \mathcal{C}_i^{(0)}} \mathbf{W}(c | y_0^{l-1})}{\sum_{c' \in \mathcal{C}_i^{(1)}} \mathbf{W}(c' | y_0^{l-1})} = \frac{\mathbf{W}_1^{(i)}(\mathbf{0}, 0 | y_0^{l-1})}{\mathbf{W}_1^{(i)}(\mathbf{0}, 1 | y_0^{l-1})}$$

– ЛОПП для i -го символа, $\mathcal{C}_i^{(0)} = \mathcal{C}_{i+1}$, $\mathcal{C}_i^{(1)} = \mathcal{C}_i \setminus \mathcal{C}_{i+1}$. Вместо вычисления интеграла в (13) по $y_0^{l-1} \in \mathbb{R}^l$ можно вычислять

$$\mathbb{I}_i = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} p_i(\xi | 0) \log_2(1 + e^{-\xi}) d\xi, \quad (14)$$

где $p_i(\xi | 0)$ – плотность вероятности ЛОПП $\xi = \log \mathcal{R}_i(Y_0^{l-1})$, где величины Y_j подчиняются распределению $\mathbf{W}(y | 0)$. Такой интеграл можно вычислить методом Монте-Карло, т.е. подавая случайные векторы Y_0^{l-1} на декодер, вычисляющий $\log \mathcal{R}_i(Y_0^{l-1})$, и усредняя соответствующие значения $\log_2(1 + e^{-\xi})$ [48].

Однако точное вычисление величин $\log \mathcal{R}_i(Y_0^{l-1})$ может оказаться слишком сложным для практической реализации. Оказывается, что подстановка этих значений в приближенные ЛОПП, задаваемые формулой (6), приводит к неверным результатам (например, $\mathbb{I}_i < 0$). Поэтому мы предлагаем переписать (13) в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_i &= 1 - \int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{W}(y_0^{l-1} | 0) \log_2 \left(1 + \frac{\mathbf{W}_1^{(i)}(\mathbf{0}, 1 | y_0^{l-1})}{\mathbf{W}_1^{(i)}(\mathbf{0}, 0 | y_0^{l-1})} \right) dy_0^{l-1} \approx \\ &\approx 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\psi | 0) \log_2 \left(1 + \frac{P\{u_i = 1 | \psi\}}{P\{u_i = 0 | \psi\}} \right) d\psi = \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\psi | 0) \log_2 \left(1 + \frac{f_i(-\psi | 0)}{f_i(\psi | 0)} \right) d\psi, \end{aligned} \quad (15)$$

где последнее равенство справедливо для симметричного канала, $f_i(\psi | 0)$ – плотность вероятности ЛОПП $\mathcal{L}_1^{(i)}(\mathbf{0} | y_0^{l-1})$, заданная (6), а $P\{u_i = c | \psi\}$ – вероятность того, что $u_i = c$ при условии $\mathcal{L}_1^{(i)}(\mathbf{0} | y_0^{l-1}) = \psi$. Следовательно, можно оценить $\mathbb{I}_i$, построив гистограмму [48] для $f_i(\psi | 0)$ по выходу алгоритма, вычисляющего (6).

Аналогично можно вычислить параметр Бхаттачарьи для $\mathbf{W}_1^{(i)}$ как [49, формула (4.62)]

$$\mathbb{Z}_i = \int_{-\infty}^{\infty} g_i(\psi) e^{-\psi/2} d\psi, \quad (16)$$

где $g_i(\psi | 0)$ – плотность вероятности для $\mathbf{L}_1^{(i)}(\mathbf{0} | y_0^{l-1})$. Ее можно аппроксимировать как $g_i(\psi | 0) \approx f_i(\psi | 0)$, так что ее можно получить из той же гистограммы для $f_i(\psi | 0)$, что и $\mathbb{I}_i$.

3.2. Гауссовская аппроксимация.

Общий подход. Для построения полярного кода по некоторым ядрам $\mathcal{K}_p$, $1 \leq p \leq m$, мы предлагаем считать, что все подканалы $\mathbf{W}_p^{(i)}$, $0 \leq p \leq m$, $0 \leq i < L_p$, явля-

ются гауссовскими, так что их можно полностью охарактеризовать соответствующей взаимной информацией. Мы предлагаем построить таблицы значений пропускной способности $\mathbb{I}_{p,i}(C)$ битовых подканалов $\mathbf{W}_{1,\mathcal{K}_p}^{(i)}$, индуцированных каждым ядром $\mathcal{K}_p$, для некоторого конечного набора параметров исходного АБГШ-канала $\mathbf{W}$, где C – пропускная способность этого канала $\mathbf{W}$. Эти таблицы можно использовать для интерполяции значений $\mathbb{I}_{p,i}(C)$ для любого значения $C \in [0, 1]$.

Для построения полярного (l^m, k) -кода для АБГШ-канала с пропускной способностью C мы предлагаем рекуррентно вычислять пропускную способность $I_{p,t}(C)$ битового подканала $\mathbf{W}_p^{(t)}$ как

$$I_{p,l_p i+j}(C) \approx \mathbb{I}_{p,j}(I_{p-1,i}(C)), \quad 0 \leq j < l_p, \quad p \geq 1, \quad (17)$$

где $I_{0,0}(C) = C$, и объявить замороженными символы u_i , где i – номера подканалов с наименьшими значениями $I_{m,i}(C)$, $0 \leq i < n$.

Альтернативным вариантом является построение аналогичных интерполяционных таблиц $\mathbb{Z}_{p,i}(Z)$ для параметра Бхаттачарьи $\mathbb{Z}_i$ битовых подканалов $\mathbf{W}_{1,\mathcal{K}_p}^{(i)}$, индуцированных каждым ядром $\mathcal{K}_p$, где Z – параметр Бхаттачарьи исходного канала. Тогда параметры Бхаттачарьи для битовых подканалов, индуцированных матрицей A , можно оценить как

$$\mathbb{Z}_{p,l_p i+j}(Z) \approx \mathbb{Z}_{p,j}(Z_{p-1,i}(Z)), \quad 0 \leq j < l_p, \quad p \geq 1. \quad (18)$$

Для построения полярного кода мы предлагаем объявить замороженными символы u_i , где i – номера подканалов с наибольшими значениями $Z_{m,i}(C)$.

Хвосты функций надежности. К сожалению, интерполяционные таблицы для $\mathbb{I}_{p,j}(C)$ и $\mathbb{Z}_{p,j}(Z)$, полученные методом Монте-Карло, оказываются очень неточными для значений C и Z , близких к 0 и 1. Это может привести к довольно плохим конструкциям длинных полярных кодов. Здесь мы предложим инструменты, которые помогут улучшить точность этих функций вблизи их граничных точек.

Лемма 1. *Если $\mathbf{W}$ – АБГШ-канал с двоичным входом, то $\mathbb{I}_i(C)$, где $C \in [0, 1]$ – пропускная способность канала $\mathbf{W}$, является непрерывной бесконечно дифференцируемой функцией.*

Из леммы 1 следует, что существует разложение в ряд Тейлора для $\mathbb{I}_{p,i}(C)$. Так как $\mathbb{I}_{p,i}(0) = 0$, то $\mathbb{I}_{p,i}(C) = \alpha_{p,i} C^{\delta_{p,i}} + o(C^{\delta_{p,i}})$ для некоторых $\alpha_{p,i} \in \mathbb{R}$, $\delta_{p,i} \in \mathbb{N}$. Поэтому, чтобы не использовать зашумленные оценки Монте-Карло в окрестности $C = 0$, мы предлагаем использовать аппроксимацию

$$\mathbb{I}'_{p,i}(C) \approx \begin{cases} \mathbb{I}_{p,i}(C), & C > C_0, \\ \alpha_{p,i} C^{\delta_{p,i}}, & C \leq C_0, \end{cases} \quad (19)$$

где пороговое значение C_0 можно выбирать в зависимости от точности оценки по методу Монте-Карло для $\mathbb{I}_{p,i}(C)$. Параметры $\alpha_{p,i}$, $\delta_{p,i}$ можно найти численным методом подгонки кривых, используя значения $\mathbb{I}_{p,i}(C)$, полученные методом Монте-Карло для достаточно больших C . Точность подгонки кривых можно улучшить, если разрешить использовать вещественные значения $\delta_{p,i}$.

В [12, формула (14)] было показано, что параметры Бхаттачарьи битовых подканалов, индуцированных ядром, удовлетворяют неравенствам

$$Z^{D_{pj}} \leq \mathbb{Z}_{p,j} \leq 2^{l-i} Z^{D_{pj}},$$

т.е. $\mathbb{Z}_{p,i} = \Theta(Z^{D_{p,i}})$, где $D_{p,i}$ – частичные расстояния для ядра $\mathcal{K}_p$. Поэтому мы предлагаем использовать аппроксимацию

$$\mathbb{Z}'_{p,i}(Z) \approx \begin{cases} \mathbb{Z}_{p,i}(Z), & Z > Z_{p0}, \\ \beta_{p,i} Z^{D_{p,i}}, & Z \leq Z_{p0}, \end{cases} \quad (20)$$

где $\beta_{p,i}$ можно найти путем численной подгонки кривых, а пороговое значение Z_0 можно выбирать в зависимости от точности оценки по Монте-Карло для $\mathbb{Z}_{p,i}(Z)$.

Гибридный подход. Обе формулы (17), (18) приводят к довольно неточным значениям для подканалов $\mathbf{W}_m^{(i)}$, если некоторые промежуточные значения в этих рекурсиях становятся близкими к 1, где не применимы уточненные оценки (19)–(20). Это связано как с неточностью гауссовой аппроксимации, так и с ошибками интерполяции. Однако из $C \approx 1$ следует $Z \approx 0$ и наоборот. Следовательно, можно надеяться, что хотя бы одно из этих выражений может привести к достаточно точным результатам.

Поэтому мы предлагаем для получения уточненных оценок объединить границы (8) и (9). А именно, мы предлагаем использовать среднее значение этих верхних и нижних границ и оценок, данных формулами (19)–(20). Кроме того, необходимо убедиться, что полученное значение не меньше соответствующей нижней границы. Более конкретно, мы предлагаем вычислить

$$I_{p,l_p i+j}(C, Z) = \begin{cases} \iota_{ij}, & \iota_{ij} \leq \varepsilon, \\ \max \left(\tilde{I}(\zeta_{ij}), \frac{\tilde{I}(\zeta_{ij}) + \iota_{ij} + \hat{I}(\zeta_{ij})}{3} \right), & \iota_{ij} > \varepsilon, \end{cases} \quad (21)$$

и

$$Z_{p,l_p i+j}(C, Z) = \begin{cases} \zeta_{ij}, & \zeta_{ij} \leq \delta, \\ \max \left(\tilde{Z}(\iota_{ij}), \frac{\tilde{Z}(\iota_{ij}) + \zeta_{ij} + \hat{Z}(\iota_{ij})}{3} \right), & \zeta_{ij} > \delta, \end{cases} \quad (22)$$

где

$$\iota_{ij} = \mathbb{I}'_{p,j}(I_{p-1,i}(C, Z)), \quad \zeta_{ij} = \mathbb{Z}'_{p,j}(Z_{p-1,i}(C, Z)),$$

а Z и C – параметр Бхаттачарьи и пропускная способность исходного канала соответственно. Эмпирическим путем было установлено, что пороговые значения $\varepsilon = 0,9997$ и $\delta = 0,7$ обеспечивают достаточно хорошую точность.

Таким образом, предлагаемый метод построения полярного кода включает в себя следующие шаги:

1. Предварительные вычисления: с помощью метода Монте-Карло построить гистограммы ЛОПП плотностей распределения $f_i(\psi|0)$ и построить таблицы значений $\mathbb{I}_{p,i}(C)$ и $\mathbb{Z}_{p,i}(Z)$ по формулам (15)–(16) для битовых подканалов $\mathbf{W}_{1,\mathcal{K}_p}^{(i)}$, $0 \leq i < l_p$, индуцированных каждым ядром $\mathcal{K}_p$. Здесь C и Z – пропускная способность и параметры Бхаттачарьи АБГШ-канала с двоичным входом с дисперсией шума σ^2 . Кроме того, вычислить значения $\alpha_{p,j}$, $\beta_{p,j}$, $D_{p,j}$, $Z_{p,0}$, $0 \leq j < l_p$.
2. Для построения полярного кода с поляризационной матрицей $\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{K}_m$ для АБГШ-канала с двоичным входом с пропускной способностью C и параметром Бхаттачарьи Z , предлагается вычислять $I_{m,i}(C, Z)$, $0 \leq i < \prod_{j=1}^m l_j$, по формулам (21)–(22), используя $I_{0,0}(C, Z) = C$ и $Z_{0,0}(C, Z) = Z$ в качестве начальной точки рекурсии. В качестве замороженного множества $\mathcal{F}$ предлагается взять множество индексов i подканалов с наименьшими значениями $I_{m,i}(C, Z)$.

Сложность шага предварительного вычисления для каждого из ядер составляет $O(TPK)$, где T – количество итераций Монте-Карло на одну точку σ^2 , P – количество различных значений σ^2 , а K – общая сложность обработки ядра. Следует отметить, что этап предварительных вычислений нужно выполнить только один раз для каждого ядра, а его результаты можно в дальнейшем использовать для построения большого количества различных кодов.

Шаг построения полярного кода для предлагаемого метода требует

$$\sum_{i=1}^m l^i = \frac{l^{m+1} - 1}{l - 1} = O(n)$$

операций вычисления по формулам (21)–(22). Это намного меньше по сравнению со сложностью $O(Tn \log n)$ построения полярного кода методом Монте-Карло, где T – количество итераций в методе Монте-Карло.

Этот подход можно непосредственно применять для выбора статических и динамических замороженных символов типа В при построении полярных подкодов, описанных в п. 2.5.

§ 4. Поиск наилучшего поляризующего преобразования со смешанными ядрами

Напомним, что поляризующее преобразование со смешанными ядрами задается матрицей

$$A = \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{K}_m,$$

где $\mathcal{K}_i$ – ядро поляризации размера $l_i \times l_i$, и таким образом, общая длина A равна $n = \prod_{i=1}^m l_i$. Возможные размеры l_i ядер поляризации в A зависят от разложения на множители целого числа n . Заметим, что некоторые n могут допускать много конфигураций размеров ядер, например, для $n = 2400$ имеем $2400 = 32 \cdot 15 \cdot 5 = 30 \cdot 16 \cdot 5 = 24 \cdot 20 \cdot 5 = 32 \cdot 25 \cdot 3$ и т.д.

В недавних работах [16, 50, 51] были предложены различные конструкции ядер разной длины. Таким образом, для фиксированной длины n существует множество способов построения матрицы A . Более того, в общем случае произведение Кронекера некоммукативно, то есть для двух квадратных матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \mathbf{P}(\mathbf{B} \otimes \mathbf{A})\mathbf{P}^\top, \quad (23)$$

где $\mathbf{P}$ – некоторая перестановочная матрица. Другими словами, для ядер поляризации $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ поляризующие преобразования $\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}_2 \otimes \mathcal{K}_1$ могут привести к полярным кодам с различной корректирующей способностью при ПИ-декодировании.

Иными словами, если задан набор ядер размера l_i из разложения числа n на множители, то возникает вопрос, как скомбинировать их, чтобы получить матрицу A , приводящую к наименьшей вероятности ошибки при ПИ-декодировании. Для удобства обозначим

$$\mathbf{W}_{m,A}^{(i)} = \mathbf{W}_{m,A}^{(i)}(y_0^{n-1}, u_0^{i-1} | u_i).$$

Пусть $P_e(\mathbf{W}_{m,A}^{(i)})$ – вероятность ошибки в канале $\mathbf{W}_{m,A}^{(i)}$. Пусть $\mathcal{A}_k$ – множество индексов информационных битов, т.е. $\mathcal{A}_k = [n] \setminus \mathcal{F}$. Для некоторого канала W обозначим через $P_e(W, \mathcal{A}_k)$ вероятность ошибки на кодовое слово при ПИ-декодировании

нии. Из доказательства [2, утверждение 2] следует, что

$$P_e(W, A, \mathcal{A}_k) \leq \sum_{i \in \mathcal{A}_k} P_e(\mathbf{W}_{m,A}^{(i)}). \quad (24)$$

Напомним, что $\mathbf{W}_{m,A}^{(i)}$ также является дискретным каналом без памяти с двоичным входом, поэтому имеем [2]

$$P_e(\mathbf{W}_{m,A}^{(i)}) \leq Z(\mathbf{W}_{m,A}^{(i)}), \quad (25)$$

и [52, теорема 2.3]

$$h^{-1}(1 - I(\mathbf{W}_{m,A}^{(i)})) \leq P_e(\mathbf{W}_{m,A}^{(i)}) \leq \frac{1}{2}(1 - I(\mathbf{W}_{m,A}^{(i)})). \quad (26)$$

Поскольку вычисление $h^{-1}(p)$ также численно неустойчиво, рассмотрим следующие оценки, которые вытекают из (24) и (25)–(26):

$$P_e(W, A, \mathcal{A}_k) \leq \sum_{i \in \mathcal{A}_k} Z(\mathbf{W}_{m,A}^{(i)}), \quad (27)$$

$$P_e(W, A, \mathcal{A}_k) \leq \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{A}_k} (1 - I(\mathbf{W}_{m,A}^{(i)})). \quad (28)$$

Предположим, что имеется множество $\mathbb{K}$ ядер поляризации, такое что для каждого $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ его размер $l(\mathcal{K})$ делится на n . Тогда определим множество $\mathcal{G}(\mathbb{K}, n)$ всех подмножеств $\{\mathcal{K}^{(1)}, \mathcal{K}^{(2)}, \dots, \mathcal{K}^{(\overline{m})}\} \subseteq \mathbb{K}$, где $\prod_{i=1}^{\overline{m}} l(\mathcal{K}_i) = n$. Заметим, что $\overline{m}$ могут быть различными.

Итак, мы предлагаем следующий метод поиска наилучшего поляризующего преобразования со смешанными ядрами A размера n с наилучшим значением вероятности $P_e(W, A, \mathcal{A}_k)$:

1. Составим множество $\mathbb{K}$ ядер, для которых $|\mathcal{G}(\mathbb{K}, n)| > 0$;
2. Для каждого ядра $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ вычислим $\mathbb{I}_i$ и $\mathbb{Z}_i$ по формулам (15)–(16), $i \in [l(\mathcal{K})]$, как описано в п. 3.1;
3. Для каждого $\{\mathcal{K}^{(1)}, \mathcal{K}^{(2)}, \dots, \mathcal{K}^{(\overline{m})}\} \in \mathcal{G}(\mathbb{K}, n)$ и каждой перестановки σ из $\overline{m}$ элементов:
 - (а) Положим $A = \mathcal{K}_{\sigma(1)} \otimes \mathcal{K}_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes \mathcal{K}_{\sigma(\overline{m})}$;
 - (б) Вычислим $I(\mathbf{W}_{m,A}^{(i)}) = I_{m,i}(C, Z)$ с помощью предложенного гибридного метода (21), используя $\mathbb{I}_i$ и $\mathbb{Z}_i$, полученные предварительными вычислениями на шаге 2;
 - (в) Вычислим аппроксимацию $\bar{P}_e$ верхней границы (28) на $P_e(W, A, \mathcal{A}_k)$, где $\mathcal{A}_k \in [n]$ – множество индексов k с наилучшими значениями $I_{m,i}(C, Z)$;
 - (г) Сохраним v наилучших преобразований A , приводящих к наименьшей верхней границе $\bar{P}_e$ на вероятность ошибки;
4. Пусть $\mathbb{A}$ – набор наилучших преобразований, полученных на предыдущем шаге. Построим коды v с преобразованиями $A \in \mathbb{A}$ и найдем $P_e(W, A, \mathcal{A}_k)$ методом имитационного моделирования;
5. Выберем преобразование A с наилучшим значением $P_e(W, A, \mathcal{A}_k)$.

Согласно проведенным нами экспериментам мы полагаем, что достаточно использовать параметр $v = 8 \dots 10$.

Заметим, что полный перебор по всем перестановкам на шаге 3 вряд ли проблематичен с точки зрения сложности. Действительно, в [12] было показано, что

Параметры интерполяции пропускной способности и частичные расстояния для ядра K_2

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$D_{2,i}$	1	2	2	4	2	2	4	4	6	6	8	8	4	8	8	16
$\delta_{2,i}$	13,3	7,2	6,8	3,6	6,7	6,4	5,2	4,9	3,5	3,5	1,9	1,9	3,1	1,8	1,8	0,96

не существует ядер размера меньше 15 со скоростью поляризации больше $1/2$, т.е. больше скорости поляризации ядра Арикаана. Из этого следует, что для кодов практически приемлемой длины, использующих ядра с высокой скоростью поляризации, число ядер $\overline{m}$ должно быть достаточно малым.

Наши эксперименты показывают, что аппроксимация верхней границы (28) на основе пропускной способности битовых подканалов, более точна, чем аппроксимация верхней границы (27) на основе параметра Бхаттачарьи. Поэтому для сравнения различных поляризующих преобразований и выбора хороших кодов мы используем формулу (28).

§ 5. Численные результаты

5.1. Длинные полярные коды с большими ядрами. В этом пункте представлены результаты моделирования для случая ядер K_1 и K_2 размера 16×16 , введенных в [53], а также ядра K_3 размера 32, полученного по методу, приведенному в [50]. Эти ядра имеют скорости поляризации $E(K_1) = E(K_2) = 0,51$, $E(K_3) = 0,522$ и экспоненты масштабирования двоичного стирающего канала $\mu(K_1) = 3,346$, $\mu(K_2) = 3,45$ и $\mu(K_3) = 3,417$ соответственно.

На рис. 1 показаны функции пропускной способности битовых подканалов для АБГШ-канала (сплошные линии), двоичного симметричного канала (пунктирные линии) и двоичного стирающего канала (штрих-пунктирные линии). Кривые для АБГШ-канала были получены методом Монте-Карло, а кривые для двоичного симметричного и двоичного стирающего каналов были вычислены в точности как описано в п. 3.1. Одни и те же кривые построены в линейном и логарифмическом масштабах. Видно, что погрешности метода Монте-Карло приводят к некоторому шуму в области низкой пропускной способности для кривых, полученных для АБГШ-канала.

Также видно, что у кривых для разных подканалов есть точки пересечения. В зависимости от типа исходного канала эти точки оказываются при различных значениях его пропускной способности C . Таким образом, функции пропускной способности для двоичного стирающего канала и двоичного симметричного канала нельзя надежно использовать для АБГШ-канала.

На рис. 2 показаны функции параметров Бхаттачарьи $Z_{1,j}$ для ядра K_2 в случае АБГШ-канала. В табл. 1 приведены значения параметров $\delta_{2,i}$ и $D_{2,i}$ для рассматриваемого ядра K_2 .

Необходимо следить за тем, чтобы при построении полярных кодов не использовались зашумленные участки интерполяционных кривых пропускной способности и параметра Бхаттачарьи. Чтобы избежать этого, необходимо тщательно выбирать пороговые значения C_0 и Z_0 , при которых происходит переход к аналитическому методу. Исходя из этого соображения, мы предлагаем задаться значениями $C_0 = 10^{-3}$ в (19) и $Z_0 = 10^{-4}$ в (20). Для $C \geq C_0$ и $Z \geq Z_0$ для вычисления $\mathbb{I}_{p,j}(C)$ и $Z_{p,j}(Z)$ мы используем линейную интерполяцию между сохраненными значениями.

На рис. 3 показана корректирующая способность полярных кодов длины $1/2$ на основе поляризующих преобразований $A = K_1^{\otimes 4}$, $A = K_2^{\otimes 4}$ и полярного кода длины 32768 на основе $A = K_3^{\otimes 3}$ при ПИ-декодировании. Эти коды были постро-

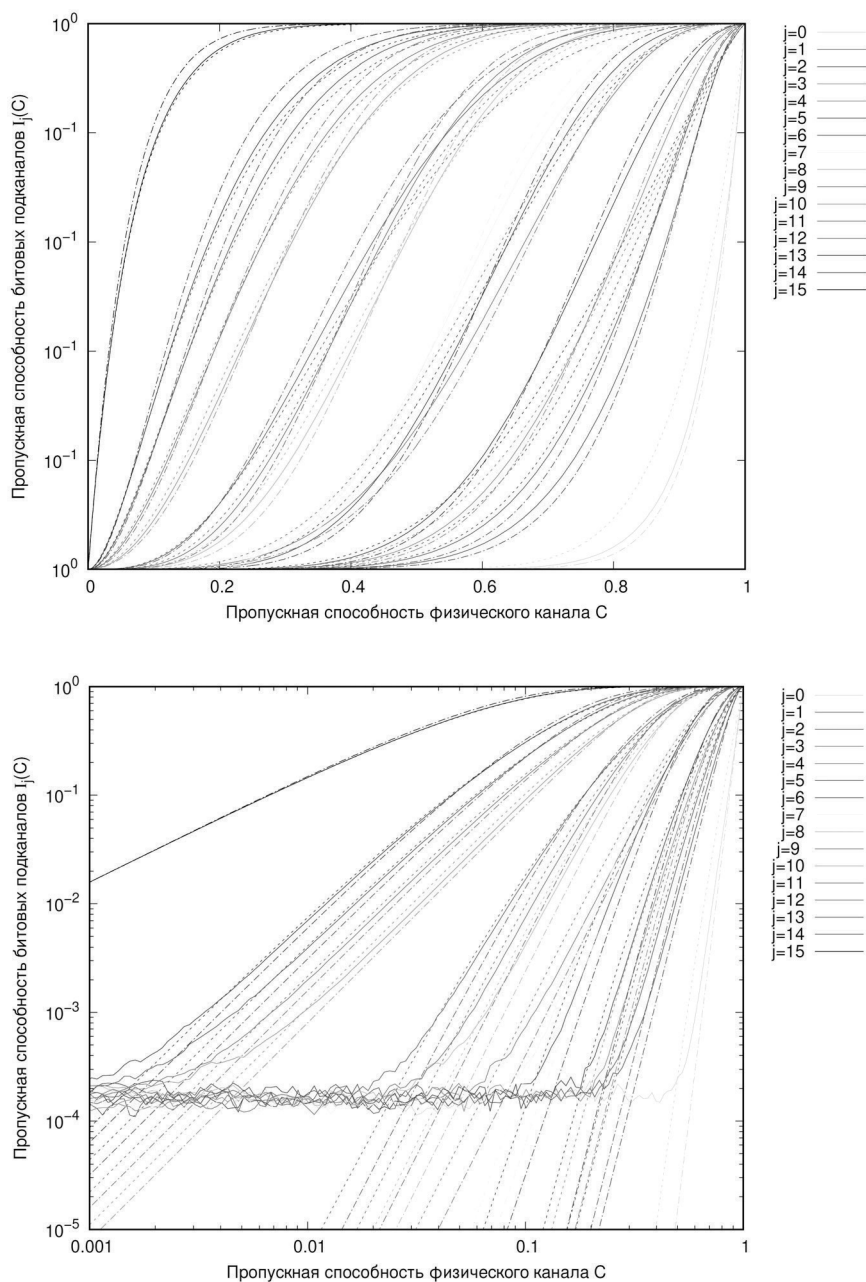


Рис. 1. Функции пропускной способности подканалов для K_2

ены для АБГШ-канала с использованием предложенного подхода, основанного на аппроксимации пропускной способности (17), аппроксимации параметра Бхаттачарьи (18), гибридного подхода к аппроксимации пропускной способности (21)–(22), а также метода Монте-Карло. Видно, что подходы, основанные на аппроксимации только пропускной способности и параметра Бхаттачарьи, могут привести к существенному снижению эффективности по сравнению с конструкцией, основанной на

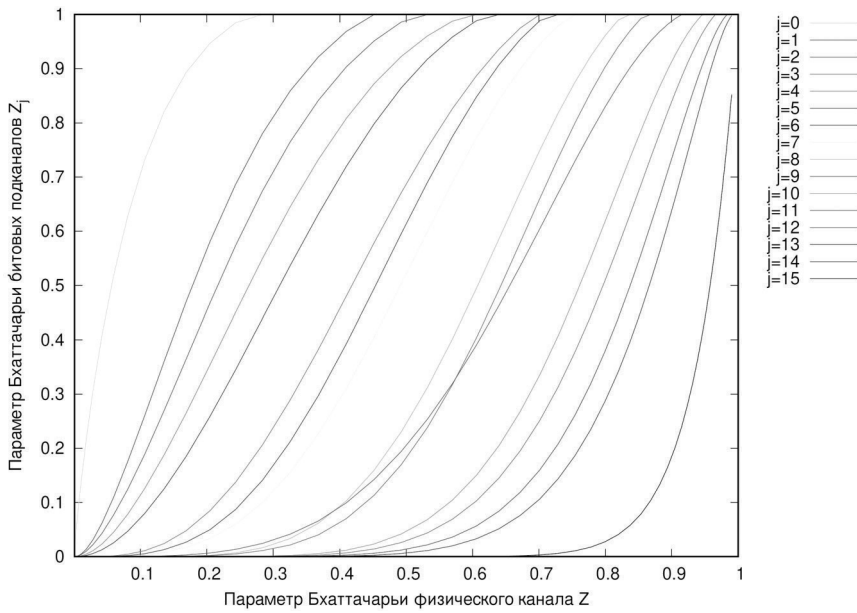


Рис. 2. Параметр Бхаттачарьи АБГШ-канала для K_2

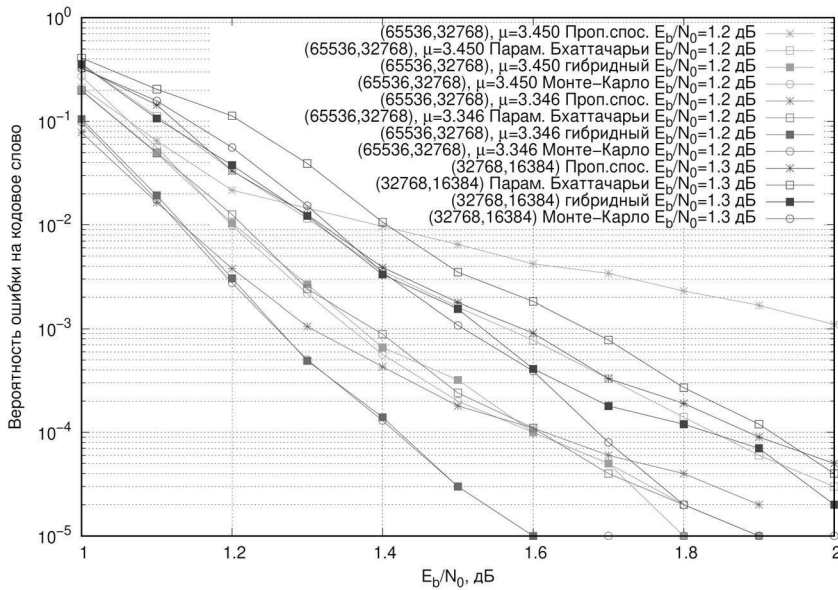


Рис. 3. Корректирующая способность длинных полярных кодов при ПИ-декодировании

методе Монте-Карло. Однако гибридный подход приводит к кодам с почти такой же корректирующей способностью, что и конструкция на основе метода Монте-Карло. Заметим также, что наилучшей корректирующей способностью обладает код, построенный с использованием ядра с наименьшей экспонентой масштабирования.

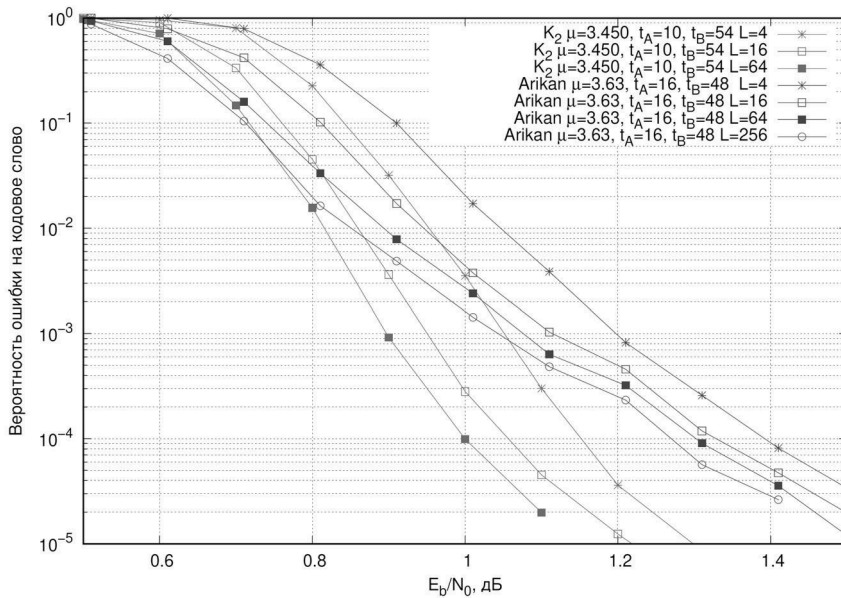


Рис. 4. Корректирующая способность полярных (65536, 32768)-подкодов

Полярные коды с большими ядрами все еще обладают довольно низким минимальным расстоянием, что приводит к невысокой корректирующей способности. Использование рандомизированных полярных подкодов [1] позволяет получить коды с существенно лучшим распределением весов. На рис. 4 показана корректирующая способность рандомизированных полярных подкодов со скоростью $1/2$ на ядре Арикана и ядре K_2 с t_A динамически замороженными символами типа А и t_B динамически замороженными символами типа В. Декодирование производилось с помощью последовательного алгоритма [9], который, как известно, обеспечивает почти такую же эффективность, что и списочный ПИ-декодер [6] с тем же размером списка L . Видно, что код, основанный на ядре размера 16×16 , характеризуется гораздо более крутой кривой вероятности ошибки на кодовое слово и требует значительно меньшего размера списка для достижения той же вероятности ошибки, что и код, основанный на ядре Арикана.

5.2. Сравнение полярных кодов с различными поляризующими преобразованиями. Для исследования точности аппроксимации верхней границы (28) было проведено моделирование различных преобразований A длины 2400, состоящих из следующих ядер:

- матрицы Арикана $F_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\otimes t}$ размера $2^t \times 2^t$ для $t = 2, \dots, 5$;
- укороченные матрицы Арикана $s_l(F_t)$ размеров $l = 3, 5, 15, 20, 24, 25, 30$ с конфигурациями укорочения, взятыми из [51];
- ядро K_{32} размера 32×32 из [16] и укороченные ядра $s_l(K_{32})$ для $l = 20, 24, 25, 30$;
- ядра K_{16}, K'_{16} размера 16×16 из [16] и $s_{15}(K_{16})$;
- K_{24}, K_{24}^* и K_{20} из [50].

Прежде всего, мы сравниваем границы, основанные на приближенных значениях параметра Бхаттачарьи (27) и симметричных пропускных способностей (28). Это сравнение показано на рис. 5. Видно, что оценки пропускной способности, полученные из аппроксимации (17) и (19), недостаточно точны, чтобы правильно оценить вероятность ошибки на кодовое слово при ПИ-декодировании для значений

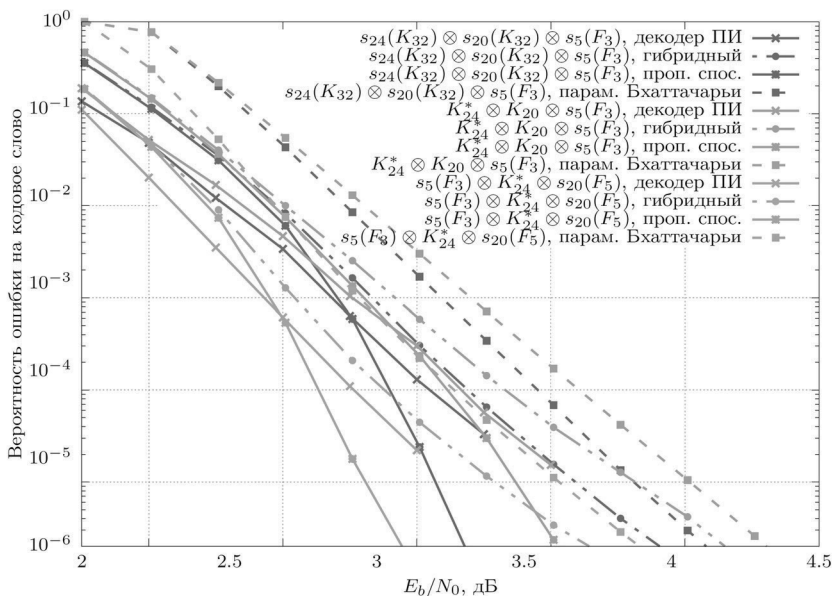


Рис. 5. Сравнение различных границ на вероятность ошибки при ПИ-декодировании

ниже 10^{-3} , а граница (27) слабее границы (28), рассчитанной с помощью предложенного гибридного подхода (см. п. 3.2).

Для исследования применимости верхней границы (28), вычисляемой по приближенным пропускным способностям битовых подканалов, полученным с помощью предложенного гибридного подхода, были построены всевозможные поляризующие преобразования A длины $n = 2400$ из вышеперечисленных ядер. В результате было получено 1716 различных преобразований, для каждого из которых был построен полярный (2400, 1200)-код со смешанными ядрами с отношением сигнал-шум на информационный символ $E_b/N_0 = 2,5$ дБ, оценена верхняя граница и смоделирована вероятность ошибки ПИ-декодирования для $E_b/N_0 = 2,5$ дБ. На рис. 6 представлена полученная приближенная верхняя граница как функция вероятности ошибки ПИ-декодирования. Видно, что разброс точек довольно мал, и нет ни одного случая, когда полученная моделированием вероятность ошибки на кодовое слово превышала бы приближенную верхнюю границу.

На рис. 7 приведены результаты моделирования вероятности ошибки ПИ-декодирования для полярных (2400, 1200)-кодов со смешанными ядрами поляризующего преобразования, заданными всеми перестановками ядер K_{24}^* , $s_{20}(F_5)$ и $s_5(F_3)$, построенных для $E_b/N_0 = 2,5$ дБ. Можно заметить, что один и тот же набор ядер может приводить к кодам с существенно различной корректирующей способностью. Например, для данного конкретного случая наблюдается разница в 0,4 дБ между лучшим и худшим преобразованиями. Более того, для данного графика, если упорядочить поляризующие преобразования по величине полученной моделированием вероятности ошибки и по верхней границе (28) при гибридном подходе, то оба порядка будут практически одинаковыми. Например, имеется небольшой промежуток между преобразованиями $K_{24}^* \otimes s_{20}(F_5) \otimes s_5(F_3)$ и $K_{24}^* \otimes s_5(F_3) \otimes s_{20}(F_5)$, который остается практически одинаковым как для смоделированной вероятности ошибки, так и для приближенно вычисленной верхней границы. Таким образом, можно выбирать оптимальный порядок поляризующих ядер, вычисляя только верхнюю границу.

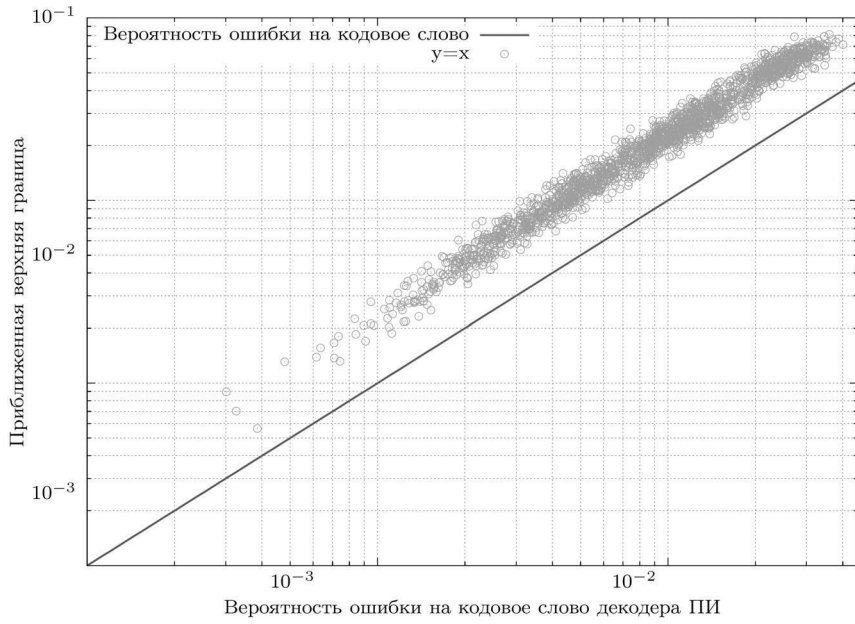


Рис. 6. Приближенная верхняя граница вероятности ошибки на кодовое слово при ПИ-декодировании как функция моделируемой вероятности ошибки на кодовое слово для различных преобразований длины 2400

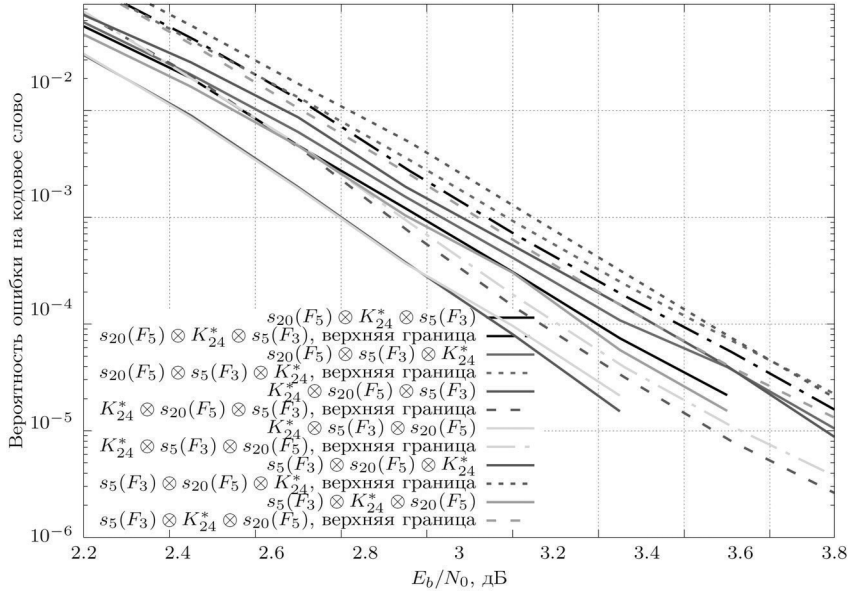


Рис. 7. Точность приближенной верхней границы вероятности ошибки на кодовое слово при ПИ-декодировании для поляризующих преобразований, заданных всеми перестановками ядер K_{24}^* , $s_{20}(F_5)$ и $s_5(F_3)$

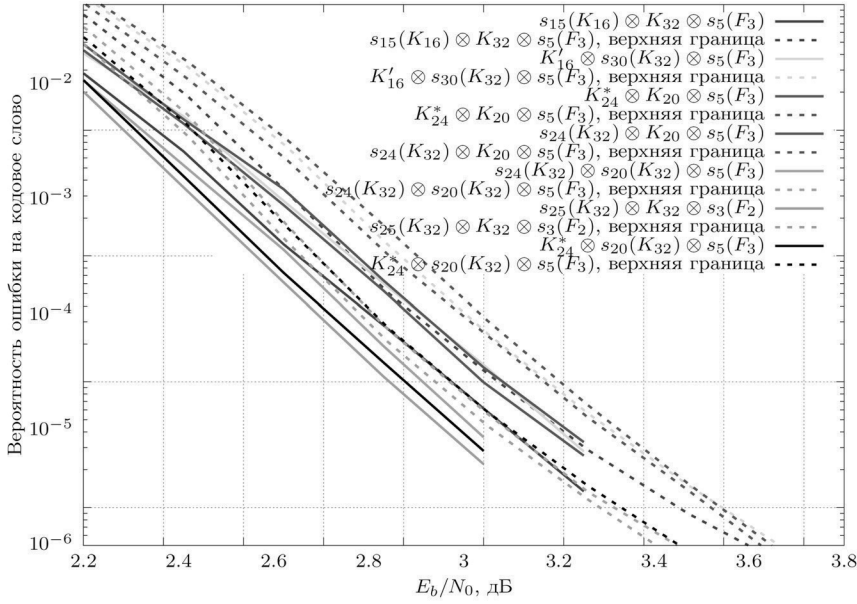


Рис. 8. Точность приближенной верхней границы вероятности ошибки на кодовое слово при ПИ-декодировании для различных поляризующих преобразований

На рис. 8 показаны приближенные верхние границы (28) и полученные моделированием вероятности ошибок для преобразований, заданных различными ядрами поляризации. Видно, что полученные оценки пропускной способности подканалов можно использовать для вычисления достаточно точной верхней границы вероятности ошибки ПИ-декодирования, что в свою очередь позволяет выбирать ядра поляризации, дающие наименьшую вероятность ошибки ПИ-декодирования.

§ 6. Заключение

В статье рассмотрены методы построения полярных кодов с большими ядрами. Изложен простой метод приближенной оценки надежности битовых подканалов, индуцированных поляризующим преобразованием с большими ядрами. Предложенный подход объединяет эмпирически полученные функции пропускной способности и параметра Бхаттачарьи для битовых подканалов в случае единственного ядра, что позволяет получить оценки пропускной способности битовых подканалов большого поляризующего преобразования, включающего несколько ядер. Было показано, что такой подход позволяет получить длинные полярные коды с почти такими же характеристиками, что и в случае построения с использованием метода Монте-Карло. Предложенный подход можно непосредственно использовать для построения полярных кодов с большими ядрами для рэлеевского канала с замираниями.

Точность предложенного подхода зависит от точности кривых интерполяции пропускной способности и параметра Бхаттачарьи, которую можно улучшить, увеличив число итераций в методе Монте-Карло, используемом для получения этих кривых. Необходимо тщательно выбирать параметры C_0 и Z_0 , которые используются при переходе к аналитическому методу интерполяции. Использование границ (8) и (9) позволяет оценить точность полученных оценок пропускной способности и параметров Бхаттачарьи для битовых подканалов. Однако следует признать, что предложенный подход основан на предположении, что битовые подканалы, индуцированные ядра-

ми поляризации, ведут себя как АБГШ-каналы с двоичным входом, что на практике может оказаться неверным. Тем не менее, было показано, что предложенный подход дает достаточно точные результаты для кодов длины 65536.

Кроме того, предложен метод выбора последовательности различных ядер поляризации в кодах со смешанными ядрами. Он использует пропускные способности битовых подканалов для вычисления приближенной верхней границы вероятности ошибки ПИ-декодирования, которая, как было показано, оказывается достаточно точной.

Предложенный подход можно также использовать для построения полярных подкодов. Было показано, что полярные подкоды с большим ядром, полученные с помощью предложенного метода, требуют гораздо меньшего размера списка для достижения той же корректирующей способности, что и полярные подкоды с ядром Арикана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Trifonov P.* On Construction of Polar Subcodes with Large Kernels // Proc. 2019 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT'2019). Paris, France. July 7–12, 2019. P. 1932–1936. <https://doi.org/10.1109/ISIT.2019.8849672>
2. *Arkan E.* Channel Polarization: A Method for Constructing Capacity-Achieving Codes for Symmetric Binary-Input Memoryless Channels // IEEE Trans. Inform. Theory. 2009. V. 55. № 7. P. 3051–3073. <https://doi.org/10.1109/TIT.2009.2021379>
3. *Marshakov E., Balitskiy G., Andreev K., Frolov A.* A Polar Code Based Unsourced Random Access for the Gaussian MAC // Proc. 2019 IEEE 90th Vehicular Technology Conf. (VTC2019-Fall). Honolulu, HI, USA. Sept. 22–25, 2019. P. 1–5. <https://doi.org/10.1109/VTCFall.2019.8891583>
4. *Xie Z., Chen P., Mei Z., Long S., Cai K., Fang Y.* Polar-Coded Physical Layer Network Coding Over Two-Way Relay Channels // IEEE Commun. Lett. 2019. V. 23. № 8. P. 1301–1305. <https://doi.org/10.1109/LCOMM.2019.2922633>
5. *Andersson M., Rathi V., Thobaben R., Klierer J., Skoglund M.* Nested Polar Codes for Wiretap and Relay Channels // IEEE Commun. Lett. 2010. V. 14. № 8. P. 752–754. <https://doi.org/10.1109/LCOMM.2010.08.100875>
6. *Tal I., Vardy A.* List Decoding of Polar Codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 2015. V. 61. № 5. P. 2213–2226. <https://doi.org/10.1109/TIT.2015.2410251>
7. *Trifonov P., Miloslavskaya V.* Polar Subcodes // IEEE J. Select. Areas Commun. 2016. V. 34. № 2. P. 254–266. <https://doi.org/10.1109/JSAC.2015.2504269>
8. *Trifonov P., Trofimuk G.* A Randomized Construction of Polar Subcodes // Proc. 2017 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT'2017). Aachen, Germany. June 25–30, 2017. P. 1863–1867. <https://doi.org/10.1109/ISIT.2017.8006852>
9. *Trifonov P.* A Score Function for Sequential Decoding of Polar Codes // Proc. 2018 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT'2018). Vail, CO, USA. June 17–22, 2018. P. 1470–1474. <https://doi.org/10.1109/ISIT.2018.8437559>
10. *Miloslavskaya V., Trifonov P.* Sequential Decoding of Polar Codes with Arbitrary Binary Kernel // Proc. IEEE 2014 Information Theory Workshop (ITW 2014). Hobart, TAS, Australia. Nov. 2–5, 2014. P. 376–380. <https://doi.org/10.1109/ITW.2014.6970857>
11. *Timokhin I., Ivanov F.* Sequential Polar Decoding with Cost Metric Threshold // Appl. Sci. 2024. V. 14. № 5. Paper No. 1847 (13 pp.). <https://doi.org/10.3390/app14051847>
12. *Korada S.B., Şaçoğlu E., Urbanke R.* Polar Codes: Characterization of Exponent, Bounds, and Constructions // IEEE Trans. Inform. Theory. 2010. V. 56. № 12. P. 6253–6264. <https://doi.org/10.1109/TIT.2010.2080990>
13. *Mori R., Tanaka T.* Channel Polarization on q -ary Discrete Memoryless Channels by Arbitrary Kernels // Proc. 2010 IEEE Int. Sympos. on Information Theory (ISIT 2010). Austin, TX, USA. June 13–18, 2010. P. 894–898. <https://doi.org/10.1109/ISIT.2010.5513568>

14. *Pfister H.D., Urbanke R.L.* Near-Optimal Finite-Length Scaling for Polar Codes over large alphabets // Proc. 2016 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT 2016), Barcelona, Spain, July 10–15, 2016. P. 215–219. <https://doi.org/10.1109/ISIT.2016.7541292>
15. *Fazeli A., Hassani H., Mondelli M., Vardy A.* Binary Linear Codes with Optimal Scaling: Polar Codes with Large Kernels // Proc. IEEE 2018 Information Theory Workshop (ITW'2018). Guangzhou, China. Nov. 25–29, 2018. P. 1–5. <https://doi.org/10.1109/ITW.2018.8613428>
16. *Trofimiuk G., Trifonov P.* Window Processing of Binary Polarization Kernels // IEEE Trans. Commun. 2021. V. 69. № 7. P. 4294–4305. <https://doi.org/10.1109/TCOMM.2021.3072730>
17. *Mori R., Tanaka T.* Performance of Polar Codes with the Construction Using Density Evolution // IEEE Commun. Lett. 2009. V. 13. № 7. P. 519–521. <https://doi.org/10.1109/LCOMM.2009.090428>
18. *Tal I., Vardy A.* How to Construct Polar Codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 2013. V. 59. № 10. P. 6562–6582. <https://doi.org/10.1109/TIT.2013.2272694>
19. *Trifonov P.* Efficient Design and Decoding of Polar Codes // IEEE Trans. Commun. 2012. V. 60. № 11. P. 3221–3227. <https://doi.org/10.1109/TCOMM.2012.081512.110872>
20. *Vangala H., Viterbo E., Hong Y.* A Comparative Study of Polar Code Constructions for the AWGN Channel, <https://arxiv.org/abs/1501.02473> [cs.IT], 2015.
21. *Bioglio V., Gabry F., Land I., Belfiore J.-C.* Multi-Kernel Polar Codes: Concept and Design Principles // IEEE Trans. Commun. 2020. V. 68. № 9. P. 5350–5362. <https://doi.org/10.1109/TCOMM.2020.3006212>
22. *Miloslavskaya V., Trifonov P.* Design of Binary Polar Codes with Arbitrary Kernels // Proc. 2012 IEEE Information Theory Workshop (ITW'2012). Lausanne, Switzerland. Sept. 3–7, 2012. P. 119–123. <https://doi.org/10.1109/ITW.2012.6404639>
23. *Trifonov P., Trofimiuk G.* Design of Polar Codes with Large Kernels // Probl. Inf. Transm. 2024. V. 60. № 4 (to appear). <https://doi.org/10.1134/S0032946024040033>
24. *Presman N., Shapira O., Litsyn S.* Mixed-Kernels Constructions of Polar Codes // IEEE J. Select. Areas Commun. 2016. V. 34. № 2. P. 239–253. <https://doi.org/10.1109/JSAC.2015.2504278>
25. *Trifonov P.* Binary Successive Cancellation Decoding of Polar Codes with Reed–Solomon Kernel // Proc. 2014 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT'2014). Honolulu, HI, USA. June 29–July 4, 2014. P. 2972–2976. <https://doi.org/10.1109/ISIT.2014.6875379>
26. *Bioglio V., Land I.* On the Marginalization of Polarizing Kernels // Proc. 2018 IEEE 10th Int. Symp. on Turbo Codes & Iterative Information Processing (ISTC 2018). Hong Kong, China. Dec. 3–7, 2018. P. 1–5. <https://doi.org/10.1109/ISTC.2018.8625378>
27. *Гриссер X., Судоренко В.П.* Апостериорно-вероятностное декодирование несистематических блочных кодов // Пробл. передачи информ. 2002. Т. 38. № 3. С. 20–33. <https://www.mathnet.ru/rus/ppi1313>
28. *Trifonov P.* Algebraic Matching Techniques for Fast Decoding of Polar Codes with Reed–Solomon Kernel // Proc. 2018 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT 2018), Vail, CO, USA, June 17–22, 2018. P. 1475–1479. <https://doi.org/10.1109/ISIT.2018.8437829>
29. *Huang Z., Zhang S., Zhang F., Duanmu C., Zhong F., Chen M.* Simplified Successive Cancellation Decoding of Polar Codes With Medium-Dimensional Binary Kernels // IEEE Access. 2018. V. 6. P. 26707–26717. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2834465>
30. *Trifonov P., Karakchieva L.* Recursive Processing Algorithm for Low Complexity Decoding of Polar Codes with Large Kernels // IEEE Trans. Commun. 2023. V. 71. № 9. P. 5039–5050. <https://doi.org/10.1109/TCOMM.2023.3285773>
31. *Трифонов П.В.* Построение и декодирование полярных кодов с большими ядрами: обзор // Пробл. передачи информ. 2023. Т. 59. № 1. С. 25–45. <https://doi.org/10.31857/S0555292323010035>
32. *Guillen i Fabregas A., Land I., Martinez A.* Extremes of Error Exponents // IEEE Trans. Inform. Theory. 2013. V. 59. № 4. P. 2201–2207. <https://doi.org/10.1109/TIT.2012.2233271>

33. Колесников С.Г., Леонтьев В.М. Серии формул для параметров Бхаттачарьи в теории полярных кодов // Пробл. передачи информ. 2023. Т. 59. № 1. С. 3–16. <https://doi.org/10.31857/S0555292323010011>
34. Fazeli A., Vardy A. On the Scaling Exponent of Binary Polarization Kernels // Proc. 52nd Annu. Allerton Conf. on Communication, Control, and Computing (Allerton'2014). Monticello, IL, USA. Sept. 30–Oct. 3, 2014. P. 797–804. <https://doi.org/10.1109/ALLERTON.2014.7028536>
35. Yao H., Fazeli A., Vardy A. Explicit Polar Codes with Small Scaling Exponent // Proc. 2019 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT'2019). Paris, France. July 7–12, 2019. P. 1757–1761. <https://doi.org/10.1109/ISIT.2019.8849741>
36. Ashikhmin A., Trifonov P. Efficient Evaluation of Polarization Behavior for Large Kernels // Proc. 2023 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT 2023). Taipei, Taiwan. June 25–30, 2023. P. 1717–1722. <https://doi.org/10.1109/ISIT54713.2023.10206496>
37. Kern D., Vorköper S., Kühn V. A New Code Construction for Polar Codes Using Min-Sum Density // Proc. 2014 8th Int. Symp. on Turbo Codes and Iterative Information Processing (ISTC'2014). Bremen, Germany. Aug. 18–22, 2014. P. 228–232. <https://doi.org/10.1109/ISTC.2014.6955119>
38. Zhou Y., Li R., Zhang H., Luo H., Wang J. Polarization Weight Family Methods for Polar Code Construction // Proc. 2018 IEEE 87th Vehicular Technology Conf. (VTC Spring). Porto, Portugal. June 3–6, 2018. P. 1–5. <https://doi.org/10.1109/VTCSpring.2018.8417498>
39. Hussami N., Korada S.B., Urbanke R. Performance of Polar Codes for Channel and Source Coding // Proc. 2009 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT 2009). Seoul, Korea. June 28–July 3, 2009. P. 1488–1492. <https://doi.org/10.1109/ISIT.2009.5205860>
40. Trifonov P. Randomized Polar Subcodes with Optimized Error Coefficient // IEEE Trans. Commun. 2020. V. 68. № 11. P. 6714–6722. <https://doi.org/10.1109/TCOMM.2020.3018781>
41. Miloslavskaya V., Li Y., Vucetic B. Design of Compactly Specified Polar Codes With Dynamic Frozen Bits Based on Reinforcement Learning // IEEE Trans. Commun. 2024. V. 72. № 3. P. 1257–1272. <https://doi.org/10.1109/TCOMM.2023.3331532>
42. Oreshin M., Trifonov P. Polar Subcodes with Improved Weight Spectrum // 2024 IEEE Int. Multi-Conf. on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON). Novosibirsk, Russian Federation. Sept. 30–Oct. 2, 2024. P. 41–46. <https://doi.org/10.1109/SIBIRCON63777.2024.10758477>
43. Sun H., Viterbo E., Liu R. Analysis of Polarization-adjusted Convolutional Codes (PAC): A Source-Channel Coding Method // Proc. 2021 IEEE Globecom Workshops (GC Wkshps). Madrid, Spain. Dec. 7–11, 2021. P. 1–6. <https://doi.org/10.1109/GCWkshps52748.2021.9682079>
44. Rowshan M., Dau S.H., Viterbo E. On the Formation of Min-Weight Codewords of Polar/PAC Codes and Its Applications // IEEE Trans. Inform. Theory. 2023. V. 69. № 12. P. 7627–7649. <https://doi.org/10.1109/TIT.2023.3319015>
45. Kann T., Kudekar S., Bloch M.R. A Path Metric Based Construction of Polarization-Adjusted Convolutional Codes // Proc. 2024 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT 2024). Athens, Greece. July 7–12, 2024. P. 2406–2411. <https://doi.org/10.1109/ISIT57864.2024.10619693>
46. Coffey J.T., Kiely A.B. The Capacity of Coded Systems // IEEE Trans. Inform. Theory. 1997. V. 43. № 1. P. 113–127. <https://doi.org/10.1109/18.567656>
47. MacMullan S.J., Collins O.M. The Capacity of Binary Channels That Use Linear Codes and Decoders // IEEE Trans. Inform. Theory. 1998. V. 44. № 1. P. 197–214. <https://doi.org/10.1109/18.651018>
48. ten Brink S. Convergence Behavior of Iteratively Decoded Parallel Concatenated Codes // IEEE Trans. Commun. 2001. V. 49. № 10. P. 1727–1737. <https://doi.org/10.1109/26.957394>
49. Richardson T., Urbanke R. Modern Coding Theory. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2008.

50. *Trofimiuk G.* A Search Method for Large Polarization Kernels // Proc. 2021 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT'2021). Melbourne, Australia. July 12–20, 2021. P. 2084–2089. <https://doi.org/10.1109/ISIT45174.2021.9517729>
51. *Trofimiuk G.* Shortened Polarization Kernels // Proc. 2021 IEEE Globecom Workshops (GC Wkshps). Madrid, Spain. Dec. 7–11, 2021. P. 1–6. <https://doi.org/10.1109/GCWkshps52748.2021.9681982>
52. *Land I.* Reliability Information in Channel Decoding: Practical Aspects and Information Theoretical Bounds. Ph.D. Thesis. Faculty of Engineering, Christian-Albrechts-University of Kiel, Germany, 2005. Available at https://macau.uni-kiel.de/receive/diss_mods_00001414.
53. *Trofimiuk G., Trifonov P.* Efficient Decoding of Polar Codes with Some 16×16 Kernels // Proc. IEEE 2018 Information Theory Workshop (ITW'2018). Guangzhou, China. Nov. 25–29, 2018. P. 11–15. <https://doi.org/10.1109/ITW.2018.8613307>

Трифонов Петр Владимирович
Трофимюк Григорий Андреевич
 Факультет информационных технологий
 и программирования, Университет ИТМО,
 Санкт-Петербург
 pvtrifonov@itmo.ru
 gtrofimiuk@itmo.ru

Поступила в редакцию
 09.10.2024
 После доработки
 22.11.2024
 Принята к публикации
 18.12.2024