ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 60 **2024** **Вып. 4**

УДК 519.21 : 519.72 : 512.75 : 519.1

 М.Л. Бланк

О ЗАСЕДАНИЯХ ДОБРУШИНСКОГО СЕМИНАРА В 2024 Г. (ЧАСТЬ 2)

Добрушинский семинар посвящен основным направлениям фундаментальной математики, которые развиваются в Добрушинской математической лаборатории: стохастической и детерминированной динамике больших систем, теории информации и теории кодирования, алгебраической геометрии и теории чисел, комбинаторным и вероятностным аспектам теории представлений. Представлена общая информация о семинаре, а также подробная информация о заседаниях семинара, прошедших с сентября 2024 г.

Ключевые слова: Добрушинский семинар, математика, динамика больших систем, эргодическая теория, теория информации, теория кодирования, алгебраическая геометрия, теория чисел.

DOI: 10.31857/S0555292324040077, **EDN:** CHEEXS

Общие сведения о семинаре

Семинар ранее проходил в ИППИ РАН, а начиная с сентября проходит в рамках Высшей школы современной математики (ВШМ) МФТИ, по вторникам с 16:15 до 18:00, МФТИ, радиотехнический корпус, РТ113.

Руководитель семинара и заведующий Добрушинской лабораторией профессор Михаил Львович Бланк.

Семинар посвящен основным направлениям, которые развиваются в Добрушинской математической лаборатории:

- стохастическая и детерминированная динамика больших систем;
- теория информации и кодирования;
- алгебраическая геометрия и теория чисел;
- комбинаторные и вероятностные аспекты теории представлений.

На семинаре с докладами выступают как сотрудники лаборатории и ВШМ, так и приглашенные докладчики. Приглашаются все желающие принять участие в обсуждении.

Семинар открыт для достаточно широкого круга математических вопросов в соответствии с научными интересами участников семинара.

Желающие выступить на семинаре, пожалуйста, обращайтесь к М.Л. Бланку (`mlblank@gmail.com`).

Сайты семинара:

`https://www.mathnet.ru/conf167`

`https://sites.google.com/view/dobr-seminar`

Заседание 17 сентября 2024 г.

Тема семинара: Наследование свойства отслеживания в динамических полугруппах.

Докладчик: М.Л. Бланк, Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Долгопрудный, Московская обл.; Высшая школа экономики, г. Москва.

Аннотация: Проблема отслеживания псевдо-траекторий (траекторий системы под действием слабых возмущений) связана с классическими результатами Д.В. Аносова о робастности равномерно гиперболических систем. Основная трудность здесь состоит в анализе бесконечно многих (по времени) возмущений системы. Я расскажу о новом подходе к концепции отслеживания, позволяющем преодолеть эту трудность и драматически расширить применимость теории отслеживания, в частности, к динамическим полугруппам и более общим типам возмущений (например, гауссовым). Все необходимые математические сведения будут обсуждены по ходу дела, при этом мы постараемся пройти весь путь от элементарных постановок до еще не решенных задач.

Заседание 24 сентября 2024 г.

Тема семинара: Какая часть корней системы случайных полиномов вещественна?

Докладчик: Б.Я. Казарновский, Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Долгопрудный, Московская обл.

Аннотация: Какова вероятность вещественности корня многочлена степени n с вещественными коэффициентами? Ответ М. Каца (1942): она асимптотически равна $2/\pi \log(n)/n$. Многочлен Лорана, вещественный на единичной окружности, назовем вещественным, как и его корни на этой окружности. Оказывается, что вероятность вещественности корня многочлена Лорана растущей степени стремится не к нулю, а к $1/\sqrt(3)$. Т.е. предел $> 1/2$! Верно, что феномен асимптотической конечности доли вещественных корней сохраняется для систем многочленов Лорана многих переменных, а также для многочленов на произвольной компактной группе Ли. В частности, корни многочленов на группе матриц сваливаются на унитарную подгруппу. В случае многочленов Лорана от n переменных, соответствующая компактная группа есть n-мерный тор. Асимптотика доли вещественных корней вычисляется через смешанные объемы некоторых выпуклых компактных множеств, определяющих рост системы полиномов. Формулировки теорем элементарны и будут приведены полностью. Будет также приведено “объяснение” доказательств. Они основаны на применении двух результатов о числе корней систем уравнений. Это версии теоремы БКК (Бернштейна – Кушниренко – Хованского) о числе корней полиномиальной системы уравнений для соответственно гладких функций и для полиномов на комплексной линейной группе.

Заседание 1 октября 2024 г.

Тема семинара: Обобщенный спектральный радиус – откуда взялся и зачем нужен.

Докладчик: В.С. Козякин, Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Долгопрудный, Московская обл.

Аннотация: Одним из наиболее распространенных способов решения векторного линейного уравнения $x = Ax + f$ является метод простых итераций, суть которого в нахождении решения путем последовательных приближений $x(n+1) = Ax(n) + f$. Распространен также другой способ решения исходного уравнения – так называемый метод Гаусса – Зейделя, который может быть представлен как поочередное вычисление итераций либо по формуле $x(n + 1) = Bx(n) + f$, либо по формуле $x(n + 1) = Cx(n) + f$, где B и C – специальным образом сконструированные по A более простые матрицы “построчного пересчета”. Возникает вопрос, что случится, если в методе Гаусса – Зейделя матрицы B и C начнут применяться не поочередно, а в произвольном порядке? Этот вопрос далеко не искусственный, и имеется множество примеров “реальных” задач, приводящих к нему, – распараллеливание вычислений, системы управления с асинхронным обменом данными, поведение систем коллективного поведения, проблема гладкости вейвлетов, теория арбитражных операций валютного рынка и т.д. Переход от итерационных процедур с одной матрицей к процедурам с несколькими матрицами, применяемыми в произвольном порядке, мгновенно делает практически бесполезной всю технику классической линейной алгебры и переводит задачу из алгоритмически и вычислительно простой в разряд “супертрудных”, основные методы решения которой в настоящее время ассоциируются с так называемой теорией обобщенного или совместного спектрального радиуса наборов матриц. В докладе будут представлены начальные постановки и определения соответствующей теории, будет дано объяснение алгебраической неразрешимости и NP-сложности вычисления обобщенного спектрального радиуса, будет сформулирована “неконструктивная” теорема о так называемых “нормах Барабанова”, до сих пор вопреки своей неконструктивности являющаяся одним из немногих работающих инструментов данной теории.

Заседание 8 октября 2024 г.

Тема семинара: Покрытие полосками и уклонение от множества нулей многочлена

Докладчик: Р.Н. Карасёв, Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, г. Москва; Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Долгопрудный, Московская обл.

Аннотация: Со времен Альфреда Тарского известна задача о том, какова должна быть минимальная суммарная ширина набора полосок, которые покрывают круг (или шар, произвольное выпуклое тело и пр.). Достаточно общий случай этой задачи решил Тогер Банг с помощью оптимизации некоторого квадратичного функционала на булевом кубе. Этот метод оказался достаточно плодотворным и был распространен, например, Китом Боллом на покрытие полосками единичного шара банахова пространства, а также Александром Полянским и Цзылинем Цзяном на задачу Ласло Фейеш Тота о покрытии сферы зонами. Но сравнительно недавно Оскар Ортега-Морено и Юйфей Чжао придумали в каком-то смысле более прямой метод решения задач про полоски через свойства максимума многочленов. По сути все сводится к доказательству того, что максимум модуля вещественного или комплексного многочлена на сфере находится достаточно далеко от множества нулей этого многочлена. Какие-то оценки в этом вопросе следуют из классического неравенства Бернштейна для нормы производной, но для точной оценки рассуждение надо модифицировать. Также надо немного поработать, чтобы применить этот метод не к сфере, а к шару. Развивая полиномиальный метод, удается доказать гипотезу Полянского – Цзяна, обобщающую их теорему, и несколько усилить теорему Кита Болла о покрытии шара комплексными полосками, которая до этого доказывалась довольно запутанным образом. При этом возникает и не решенная до конца задача о вещественном полиномиальном аналоге покрытия сферы (или чего-то еще) полосками разной ширины. Работа совместная с Алексеем Глазыриным (ун-т Техаса в долине Рио-Гранде) и Александром Полянским (ун-т Эмори).

Заседание 15 октября 2024 г.

Тема семинара: Кластерное преобразование Дональдсона – Томаса и q-характеры модулей Кириллова – Решетихина.

Докладчик: Г.А. Кошевой, Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, г. Москва.

Аннотация: Кластерные алгебры, введенные Сергеем Фоминым и Андреем Зелевинским около 2000 года, являются коммутативными алгебрами, генераторы и соотношения которых строятся рекурсивным образом. Среди этих алгебр есть алгебры однородных координат на грассманианах, на флаговых многообразиях и на многих других многообразиях, которые играют важную роль в геометрии и теории представлений. Основной целью Фомина и Зелевинского было создание комбинаторной структуры для изучения так называемых канонических базисов, которыми обладают эти алгебры и которые тесно связаны с понятием полной положительности в ассоциированных многообразиях. Быстро выяснилось, что комбинаторика кластерных алгебр также появляется во многих других предметах, например, в пуассоновой геометрии; дискретных динамических системах; высших пространств Тейхмюллера; комбинаторике и, в частности, изучение многогранников, таких как ассоциэдры Сташефа; некоммутативной алгебраической геометрия и, в частности, изучения условий стабильности в смысле Бриджленда, алгебр Калаби – Яу, инвариантов Дональдсона – Томаса и в теории представлений колчанов и конечномерных алгебр. Колчан – это ориентированный граф. Мутация колчана – это элементарная операция над колчанами и базовый комбинаторный ингредиент определения кластерных алгебр, которые рекурсивно строятся путем многократной мутации исходного семени (Q, x), состоящего из колчана Q и набора переменных x, связанных с вершинами колчана Q. Важное свойство мутаций – лорановское изменение переменных. Граф обмена имеет вершины, являющиеся семена, полученные из начального (Q, x) путем итерационной мутации, а ребра соответствуют мутациям. Максимальные зеленые последовательности введены Келлером при решении гипотезы периодичности системы Замолодчикова, хотя неявно имеются уже в работе Гайотто – Мура – Ницке. Максимальная зеленая последовательность – это специальный (конечный) путь в ориентированном графе обмена. Не все колчаны имеют максимальные зеленые последовательности. Существование таких последовательностей важно для положительного подтверждения гипотезы Фока – Гончарова. Гончаров и Шен назвали кластерным преобразованием Дональдсона – Томаса преобразование начальных переменных, соответствующие зеленым последовательностям. Для изучения этого преобразования важно не только доказать существование, но и знать явный вид максимальных зеленых последовательностей. Для класса колчанов для координатных колец однородных пространств. Колчаны для квантовых аффинных алгебр можно включить в этот класс. В нашей совместной работе с Канакубо и Накашима показано, что q-характеры модулей Кириллова – Решетихина квантовых аффинных алгебр можно вычислить, используя кластерные преобразования, следуя специфической максимальной зеленой последовательности. Это позволяет получать явные формулы кластерных преобразований Дональдсона – Томаса для координатных колец больших клеток Брюа. А используя алгоритм Френкеля – Мухина или наш алгоритм с Канакубо и Накашима получить явные формулы гораздо быстрее кластерного вычисления преобразования Дональдсона – Томаса. Доклад должен быть понятен неспециалистам.

Заседание 22 октября 2024 г.

Тема семинара: Невихревые уравнения Максвелла в цилиндре, обратные волны, резонансное излучение и линейный операторный пучок Келдыша.

Докладчик: А.Л. Делицын, Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Долгопрудный, Московская обл.

Аннотация: Если бросить камень в воду, то круги от него будут расходиться, а не сходиться. С математической точки зрения это утверждение формулируется как совпадение знаков фазовой и групповой скорости волны. В то же время, начиная с работ Лэмба, известно что в упругом цилиндре знаки фазовой и групповой скоростей волны могут иметь противоположное направление. Подобные волны называются обратными. Аналогичное явление имеет место и в электродинамике. Возникает вопрос об исследовании соответствующих спектральных задач и правильной постановке условий излучения в цилиндре. Уравнения Максвелла содержат восемь уравнений для шести неизвестных функций – шесть вихревых и два для дивергенций полей. При постановке начально-краевой задачи для уравнений Максвелла традиционно в качестве уравнений выбирают вихревые уравнения. Оставшиеся два уравнения рассматривают как их следствия. Это приводит к неоправданно тяжелым, по сути не поддающимся исследованию, спектральным задачам при попытках рассмотрения задач в цилиндре. Задачи в цилиндре имеют широкий круг приложений, например, к ним относятся задачи волоконной оптики. Мы используем подход, основанный на ином выборе основных уравнений, который сразу сводит спектральную задачу к линейному пучку Келдыша и очень сильно упрощает ее исследование. Рассматриваются различные примеры и приложения – излучение обратных волн, картины дисперсионных кривых их особых точек, резонансное излучение с аномальной скоростью роста.

Заседание 29 октября 2024 г.

Тема семинара: Об уравнении Кортевега – де Фриза.

Докладчик: В.В. Соколов, Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Долгопрудный, Московская обл.

Аннотация: С каждым интегрируемым уравнением связано много различных интересных математических объектов и структур. Самым знаменитым эволюционным интегрируемым уравнением является уравнение Кортевега – де Фриза. На его примере я постараюсь описать часть из них. А именно, речь пойдет о локальных законах сохранения, инфинитезимальных симметриях, рекурсивных операторах, локальных гамильтоновых структурах и представлении Лакса.

Заседание 12 ноября 2024 г.

Тема семинара: О распределении одной статистической суммы, связанной с двоичным симметричным каналом.

Докладчик: М.В. Бурнашев, Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Долгопрудный, Московская обл.

Аннотация: Исследуется функция распределения суммы независимых, одинаково распределенных случайных величин специального вида. С помощью такой суммы описываются текущие апостериорные вероятности сообщений для случайно выбранного кода в двоичном симметричном канале. Получены близкие между собой неасимптотические оценки снизу и сверху для этой функции распределения.

Заседание 19 ноября 2024 г.

Тема семинара: Апериодические точки внешних бильярдов.

Докладчик: В.А. Тиморин, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", г. Москва.

Аннотация: Внешний бильярд вокруг выпуклой фигуры на плоскости – отображение, отправляющее каждую точку вне данной фигуры в другой конец отрезка, начинающегося в этой точке и касающегося данной фигуры посередине. Итерации внешнего бильярда были предложены Ю. Мозером в качестве грубой модели движения планет. Если фигура – многоугольник, то получаются нетривиальные примеры кусочно-евклидовых перекладываний многоугольных кусков, двумерные аналоги перекладываний отрезков. Мы рассмотрим внешние бильярды относительно правильных N-угольников. Ранее известные строгие результаты в этом направлении опирались на динамическое самоподобие (такой подход был впервые применен С. Табачниковым), за исключением “тривиальных” (или “интегрируемых”) случаев $N = 3, 4, 6$. Самоподобия обнаружены, на текущий момент, только в случаях $N = 5, 7, 8, 9, 10, 12$. В своем докладе на международном математическом конгрессе 2022 года Р. Шварц высказал гипотезу о том, что “внешний бильярд на правильном N-угольнике имеет апериодическую орбиту, если N не равно 3, 4, 6”. Наша работа доказывает гипотезу Шварца методами, не имеющими отношения к самоподобию. Основные инструменты приходят из теории равносоставленности, в виде аддитивных инвариантов, обобщающих инвариант Са – Арну – Фати (инвариант перекладываний отрезков) на многомерный случай, с использованием инварианта трансляционной равносоставленности Хадвигера и Глура. Основано на совместных проектах с А. Белым, А. Канель-Беловым, Ф. Руховичем, В. Згурским.

Заседание 26 ноября 2024 г.

Тема семинара: Классификация интегрируемых эволюционных уравнений.

Докладчик: В. В. Соколов, Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Долгопрудный, Московская обл.

Аннотация: Будет предъявлена бесконечная серия необходимых условий интегрируемости. В частности, на примере простейшей классификационной задачи, мы продемонстрируем, что нескольких первых условий достаточно, чтобы получить конечный список уравнений.

Заседание 3 декабря 2024 г.

Тема семинара: Эквивалентные формулировки гипотезы Римана и их анализ.

Докладчик: О.Р. Мусин, отделение математики, Техасский университет в Браунсвилле.

Аннотация: Гипотеза Римана (ГР) эквивалентна многим другим гипотезам о скорости роста некоторых арифметических функций. Типичным примером является теорема Робена о сумме делителей – функции $\sigma(n)$. В 1915 году Рамануджан доказал асимптотические неравенства для $\sigma(n)$, которые эквивалентны ГР. В этом докладе я расскажу об этой и других эквивалентных формулировках для колоссально избыточных (CA) чисел, которые впервые были изучены Рамануджаном, а позднее Эрдёшом с соавторами. Я также расскажу о работе нашей группы по численному анализу этих гипотез. В частности, подтверждается гипотеза, что константы Рамануджана точны. Мы также изучали экстремумы этих функций на множестве CA и обнаружили некоторые интересные закономерности. Часть из них можно доказать при условии, что ГР верна, а часть является открытыми проблемами.

Заседание 10 декабря 2024 г.

Тема семинара: Инвариантные меры непрерывной модели контактов и случайные блуждания.

Докладчик: Е.А. Жижина, Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Долгопрудный, Московская обл.

Аннотация: В докладе я расскажу про стохастическую модель контактов в непрерывном пространстве. Будет рассмотрен так называемый критический режим, когда рождение и гибель находятся в равновесии. Обсудим, какие условия на интенсивности рождения и гибели гарантируют существование инвариантных мер. Оказывается, эти условия различны для малых ($d = 1, 2$) и больших размерностей пространства ($d > 2$). Все результаты, о которых пойдет речь в докладе, получены совместно с С. Пироговым, Ю. Кондратьевым и О. Кутовым.

Заседание 17 декабря 2024 г.

Тема семинара: Об h-принципе для отображений с заданными бордмановскими особенностями.

Докладчик: А.Д. Рябичев, Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Долгопрудный, Московская обл.

Аннотация: Пусть даны гладкие многообразия M и N одинаковой размерности. Мы хотим классифицировать отображения $M \to N$ с заданными особенностями. А именно, пусть в каждой точке замкнутого подмножества $S \subset M$ задан росток бордмановской особенности отображения в $\mathbb{R}^n$, причем все такие ростки локально согласованы. Задача: существует ли отображение $M \to N$ с особенностями, локально L-эквивалентными заданным? Оказывается, проще не строить отображение, а искать его в заданом гомотопическом классе. Для этого используется так называемый h-принцип, известный по работам Смейла, Хирша, Громова, Элиашберга и др. По заданным в S росткам естественно строится векторное расслоение E над M, такое что отображение $F\colon M \to N$ гомотопно отображению с заданными особенностями, если и только если расслоения f^*TN и E изоморфны. В докладе я напомню бордмановскую классификацию особенностей, а также опишу построение расслоения E и расскажу идею доказательства основной теоремы.

Бланк Михаил Львович
Высшая школа современной математики МФТИ, Москва
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, Москва
mlblank@gmail.com