

УДК 621.391

**РАНДОМИЗИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ДРОБЛЕНИЯ
ДЛЯ ЦЕНТРАЛИЗОВАННЫХ СИСТЕМ
СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА¹**

© 2025 г. А.А. Бурков, И.А. Пастушок, А.М. Тюрликов

*Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения (ГУАП)*

E-mail: a.burkov@k36.org, pastushokirina22@mail.ru, turlikov@guap.ru

В современных системах связи широко используются алгоритмы случайного множественного доступа (СМД), основанные на идеях алгоритма АЛОХА. Альтернативой данному подходу может быть применение идей, основанных на алгоритме дробления, пропускная способность которого 0,4877 сообщений в единицу времени, что является наибольшей пропускной способностью среди всех известных алгоритмов СМД. Основной проблемой при реализации данного алгоритма на практике является необходимость точной синхронизации всех устройств по времени. В данной статье предлагается алгоритм СМД, основанный на алгоритме дробления и лишенный данного недостатка, что позволяет применять его на практике в централизованных системах.

Ключевые слова: сотовые сети, системы случайного множественного доступа, алгоритм дробления, массовая межмашинная связь, конечный автомат

DOI: 10.7868/S3034583925030027

Поступила в редакцию 11.08.2025

После доработки 06.10.2025

Принята к публикации 29.10.2025

§ 1. Введение

Современное развитие сетей передачи данных сопровождается активным внедрением технологий Интернета вещей (IoT), в частности сценариев массовой межмашинной связи (mMTC). Для них характерны большое число устройств, низкая индивидуальная активность и ограниченный ресурс общего канала, что требует применения методов случайного множественного доступа (СМД). Рост числа подключаемых устройств усиливает требования к пропускной способности, задержкам и устойчивости соединений [1–3], что делает актуальной разработку эффективных алгоритмов СМД, способных функционировать при массовом подключении устройств.

В современных сотовых системах используются четырех- и двухшаговые процедуры случайного доступа, основанные на алгоритме АЛОХА с пропускной способностью ϵ^{-1} сообщений в единицу времени. В ряде работ [4, 5] предлагается повысить

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-19-00305-П «Пространственно-временные стохастические модели беспроводных сетей с большим числом пользователей» (см. <https://rscf.ru/project/22-19-00305/>).

эффективность этих процедур за счет применения древовидных алгоритмов, впервые предложенных Цыбаковым и Михайловым [6] и независимо Капетанакисом [7]. Эти алгоритмы обеспечивают более высокую пропускную способность по сравнению с алгоритмом АЛОХА [8–12].

Наибольшая известная пропускная способность (около 0,4877) достигается алгоритмом дробления (part-and-try) [13], однако его практическая реализация ограничена требованием абсолютной синхронизации всех абонентов с базовой станцией [14]. Это условие делает применение алгоритма в современных системах случайного доступа затруднительным.

В настоящей статье предложен модифицированный алгоритм СМД, достигающий пропускной способности 0,485 при тех же предположениях, что и в [13], но не требующий глобальной синхронизации по времени. Расширенное изложение данного исследования приведено в [15]. Авторам не известны другие алгоритмы, обеспечивающие сопоставимую эффективность при аналогичных ограничениях, что делает предложенный подход перспективным для процедур случайного доступа в сетях будущих поколений.

§ 2. Модель системы и алгоритм

Рассматривается система с потенциально неограниченным числом абонентов и одной базовой станцией. Каждый абонент имеет одно единственное сообщение для передачи. Интервалы времени между моментами поступления абонентов в систему являются независимыми случайными величинами, которые распределены по экспоненциальному закону с параметром λ (интенсивность входного потока) и средним $\frac{1}{\lambda}$. Как и в работе [13], введем ряд допущений.

Допущение 1. Все время системы разбито на интервалы одинаковой длины – слоты. Длительность слота равна времени передачи одного сообщения, и это время принято за единицу времени. Слоты будем нумеровать натуральными числами $t = 1, 2, \dots$. Абоненты могут начинать передачу информации только в начале слота.

Допущение 2. В слоте может произойти одно из трех событий: «успех» (S) – один абонент передал одно сообщение, «пусто» (E) – никто из абонентов не передавал сообщение, «конфликт» (C) – несколько абонентов приняли решение передавать сообщение в текущем слоте.

Допущение 3. В конце слота базовая станция достоверно узнает о том, какое из трех событий произошло в канале, и передает по обратному каналу информацию об этом событии и некоторую дополнительную информацию, в соответствии с которой каждый из абонентов принимает решение, передавать или нет в следующем слоте.

Аналогично тому, что было сделано в [13], работу системы можно описать в виде дерева разрешения конфликтов (ДРК), которое идентично дереву в алгоритме дробления. Все время работы системы можно разбить на непересекающиеся временные интервалы, которые будем называть сеансами. В слоте, который соответствует началу сеанса, формируется корневая вершина дерева. В последующих слотах происходит построение ДРК в соответствии с некоторым правилом, которое будет описано далее. Завершается сеанс, когда все вершины дерева становятся концевыми. Примеры сеансов и соответствующих деревьев разрешения конфликтов приведены на рис. 1 сверху.

Правило построения дерева разрешения конфликтов описывается при помощи двух взаимодействующих детерминированного и стохастического конечных автоматов. На рис. 2 представлен детерминированный конечный автомат Мили, который описывает работу базовой станции. На рис. 2 входной и выходной сигналы разделены знаком «/». Автомат имеет три состояния. Состояние 0 соответствует корню

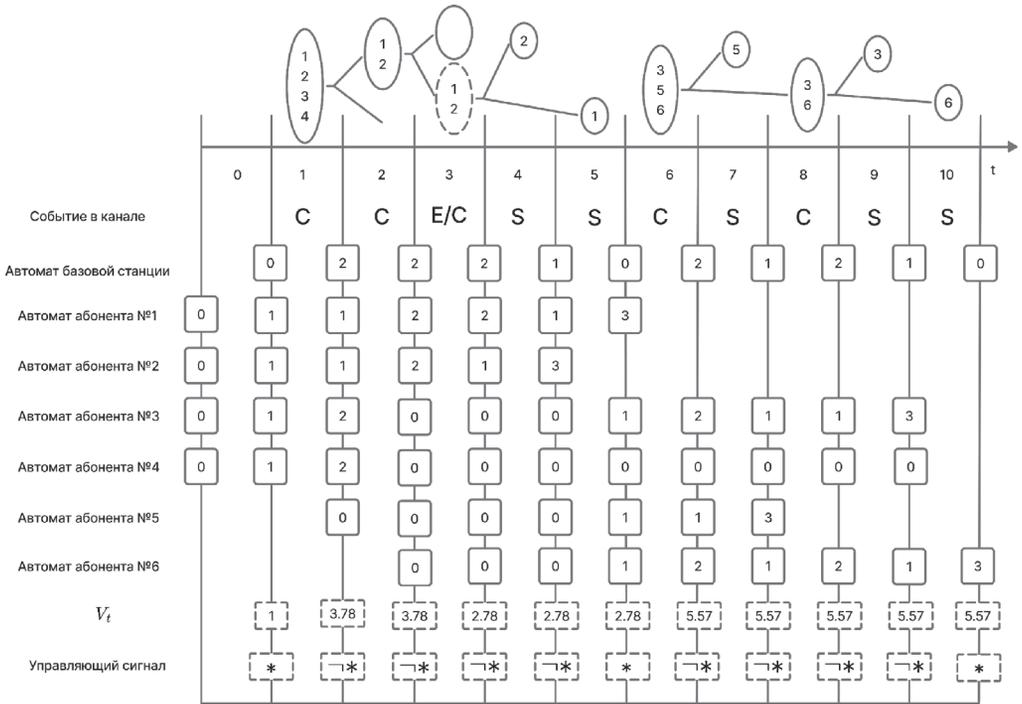


Рис. 1. Пример работы алгоритма с описанием состояний автоматов и ДРК

Таблица 1
Информация, передаваемая по обратному каналу

Событие	V_t	Управляющий сигнал
Пусто, успех или конфликт	Правила вычисления значения V_{t+1} в зависимости от V_t , текущего состояния и входного сигнала показаны на рис. 2	«**» или «¬**»

дерева, состояние 1 – нижнему потомку в дереве, состояние 2 – верхнему потомку в дереве. Входным сигналом автомата является событие, которое произошло в слоте (пусто, успех или конфликт). Выходным сигналом является величина V_t , которую в некотором смысле можно интерпретировать как приближенную оценку числа абонентов, и управляющий сигнал для абонентов. До начала работы системы автоматы находятся в состоянии 0, и значение V_t равно 1. Далее переходы между состояниями происходят в соответствии с автоматом, представленным на рис. 2. Вычисление значения V_{t+1} осуществляется на основе значения V_t в предыдущем слоте. По обратному каналу базовая станция передает информацию из табл. 1.

На рис. 3 представлен стохастический конечный автомат Мура, описывающий поведение абонента в рассматриваемой системе. Автомат имеет четыре состояния. Состояние 0 соответствует состоянию абонента вне дерева разрешения конфликтов, состояние 1 – абонент находится в верхнем потомке дерева, состояние 2 – а-

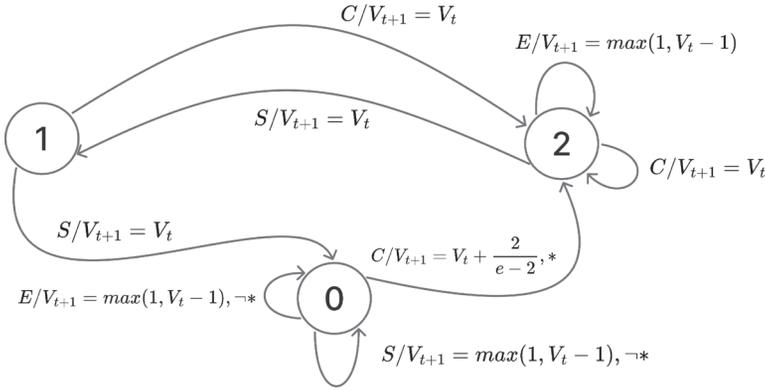


Рис. 2. Конечный автомат состояний базовой станции

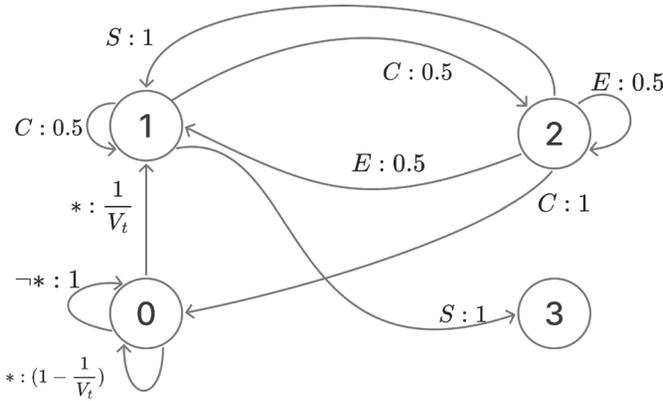


Рис. 3. Конечный автомат состояний абонента

нент находится в нижнем потомке дерева, состояние 3 – абонент уходит из системы. Входным сигналом автомата является информация, получаемая от базовой станции (см. табл. 1). На рис. 3 значение входного сигнала представляется перед знаком «:», а после «:» указывается значение вероятности перехода, в соответствии с которой автомат переходит в то или иное состояние. После появления абонента в системе его автомат находится в состоянии 0. Если в конце слота, в котором абонент появился в системе, от базовой станции приходит сигнал « $\neg*$ », то абонент с вероятностью 1 остается в состоянии 0. Если приходит сигнал «*», то абонент с вероятностью $\frac{1}{V_t}$ переходит в состояние 1 или с дополнительной вероятностью $(1 - \frac{1}{V_t})$ остается в состоянии 0. Все дальнейшие переходы между состояниями осуществляются в соответствии с автоматом, представленным на рис. 3. Переходы осуществляются либо с вероятностью 1, либо с вероятностью 0,5 в зависимости от состояния и события, которое произошло в канале. При переходе в состояние 1 абонент передает сообщение. В состоянии 2 абонент не осуществляет передачи. При попадании в состояние 3 абонент покидает систему.

Из определения сеанса, которое было дано ранее, следует, что сеансы начинаются в слоте, в котором автомат базовой станции находится в состоянии 0, и заканчиваются в слоте, в конце которого автомат переходит в состояние 0. На рис. 1

представлен пример работы алгоритма в виде ДРК, а также указаны состояния автомата для базовой станции, состояния автомата абонентов в системе и значение переменной V_t .

Как и в работе [13], в рамках введенной модели стоит задача нахождения пропускной способности (throughput) алгоритма, которая определяется следующим образом [16]:

$$R = \sup_{\lambda} \{ \lambda : \overline{D}(\lambda) < \infty \}, \tag{1}$$

где $\overline{D}(\lambda)$ – значение средней задержки при интенсивности входного потока λ .

§ 3. Анализ алгоритма

Для анализа характеристик алгоритма введем в рассмотрение несколько величин. Пусть в первом слоте некоторого сеанса передавало k абонентов. Обозначим через

$$[\tau | k], \quad [e | k], \quad [s | k]$$

общее число слотов в данном сеансе, число пустых слотов в сеансе и число успешных слотов в сеансе соответственно. Далее будем рассматривать математические ожидания этих величин:

$$T_k = \mathbf{E}[\tau | k], \quad E_k = \mathbf{E}[e | k], \quad S_k = \mathbf{E}[s | k].$$

Для дальнейшего анализа предложенного алгоритма приведем некоторые теоремы.

Теорема 1. Величины T_k удовлетворяют следующему рекуррентному уравнению:

$$T_0 = T_1 = 1, \quad T_k = \frac{1}{2^k - 2} \left[2^k + k(1 + T_{k-1}) + \sum_{\ell=2}^{k-1} C_k^\ell T_\ell \right], \quad k \geq 2. \tag{2}$$

Теорема 2. Для S_k справедливо следующее рекуррентное уравнение:

$$S_0 = 0, \quad S_1 = 1, \quad S_k = \frac{C_k^1(1 + S_{k-1}) + \sum_{\ell=2}^{k-1} C_k^\ell S_\ell}{2^k - 2}, \quad k \geq 2. \tag{3}$$

Теорема 3. Для E_k справедлива следующая рекуррентная формула:

$$E_0 = 1, \quad E_1 = 0, \quad E_k = \frac{1 + C_k^1 E_{k-1} + \sum_{\ell=2}^{k-1} C_k^\ell E_\ell}{2^k - 2}, \quad k \geq 2. \tag{4}$$

Доказательство теоремы 1 полностью совпадает с выводом формул (36) и (35) из работы [13]. Доказательство теорем 2, 3 основано на похожих рассуждениях и приведено в [15].

Используя введенные ранее теоремы, определим значение пропускной способности алгоритма согласно выражению (1). Сеансы будем нумеровать натуральными числами $U = 1, 2, 3, \dots$. Обозначим число абонентов в начале первого слота сеанса с номером U через \tilde{N}_U и введем переменную \tilde{V}_U как значение переменной V_t в начале первого слота сеанса с номером U . В примере на рис. 1 имеем $\tilde{N}_1 = 4, \tilde{V}_1 = 1$.

Соответственно, $\tilde{N}_2 = 4$, $\tilde{V}_2 = 2,78$. Из описания автоматов следует, что последовательность пар случайных величин $(\tilde{N}_U, \tilde{V}_U)$ образует двумерную марковскую цепь. Чтобы найти пропускную способность алгоритма, необходимо определить верхнюю грань по значениям λ , для которых марковская цепь эргодична. Далее, следуя работе [17], покажем, как могут быть определены условия эргодичности данной марковской цепи.

Рассмотрим средний снос по каждой компоненте двумерной марковской цепи. Средний снос по компоненте \tilde{N}_U – это математическое ожидание

$$\mathbf{E}[\tilde{N}_{U+1} - \tilde{N}_U | \tilde{N}_U = n, \tilde{V}_U = v], \quad (5)$$

а средний снос по компоненте \tilde{V}_U – это

$$\mathbf{E}[\tilde{V}_{U+1} - \tilde{V}_U | \tilde{N}_U = n, \tilde{V}_U = v]. \quad (6)$$

Если, следуя работе [17], в выражениях (5) и (6) рассмотреть предельный переход $\sqrt{(n^2 + v^2)} \rightarrow \infty$ при фиксированном значении отношения $\frac{n}{v} = x$, то число абонентов, которые передают в первом слоте сеанса, будет случайной величиной, распределенной по закону Пуассона с параметром x . С учетом предельного перехода средний снос по компоненте \tilde{N}_U можно представить в виде

$$\mu_n(x) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \left(T_k \frac{x^k}{k!} e^{-x} \right) - \sum_{k=0}^{\infty} \left(S_k \frac{x^k}{k!} e^{-x} \right), \quad x \geq 0, \quad (7)$$

а по компоненте \tilde{V}_U – в виде

$$\mu_v(x) = -e^{-x}(x+1) + \frac{2}{e-2}(1 - e^{-x} - xe^{-x}) - \sum_{k=2}^{\infty} E_k \frac{x^k}{k!} e^{-x}. \quad (8)$$

Согласно результатам, представленным в работе [13], для установления эргодичности марковской цепи $(\tilde{N}_U, \tilde{V}_U)$ при заданном значении входной интенсивности λ необходимо решить уравнение

$$\mu_n(x) = x \cdot \mu_u(x) \quad (9)$$

относительно переменной x , а затем проверить, что для всех найденных решений x_i выполняются неравенства

$$\mu_n(x_i) < 0 \quad \text{и} \quad \mu_u(x_i) < 0. \quad (10)$$

Если указанные условия соблюдаются для всех корней, то марковская цепь является эргодичной.

§ 4. Численные результаты и результаты моделирования

Численным путем было установлено, что при $\lambda = 0,4856$ все корни уравнения (9) отрицательны. При $\lambda = 0,4857$ существуют положительные корни. Значит, можно сделать вывод, что истинное значение R (1) лежит в диапазоне $[0,4856; 0,4857]$. Таким образом, $R = 0,485$ с точностью до трех знаков после запятой. Для наглядной интерпретации того, что система работает устойчиво, было выполнено следующее моделирование: на вход в систему подавался пуассоновский поток интенсивности $\lambda = 0,48 < R$, и в слоте с номером 5000 в систему добавлялось 100 абонентов. На рис. 4 показаны результаты моделирования – график зависимости числа абонентов

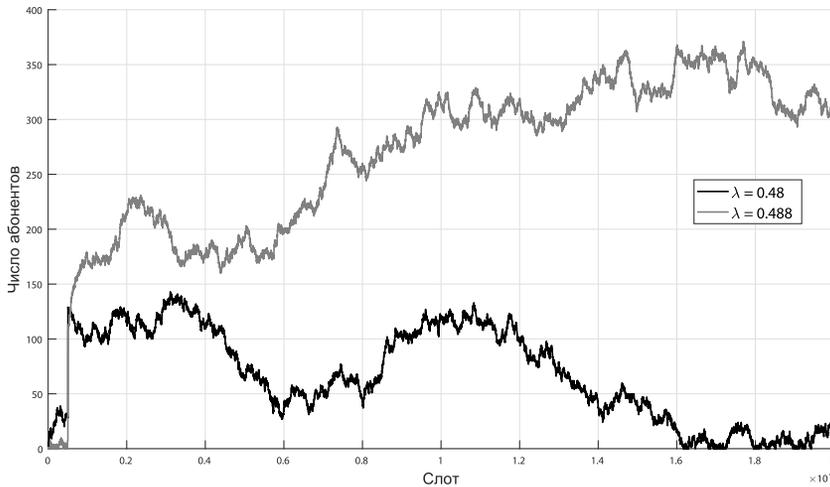


Рис. 4. График зависимости N_t от номера слота

от номера слота для $\lambda = 0,48$ и $\lambda = 0,488$. Из приведенного графика следует, что при $\lambda = 0,48 < R$ после резкого появления в системе большого числа абонентов число абонентов постепенно начинает уменьшаться, что показывает стабильную работу системы. Но при $\lambda = 0,488 > R$ число абонентов увеличивается, что означает нестабильность работы алгоритма.

§ 5. Заключение

В статье рассмотрены существующие алгоритмы случайного множественного доступа (СМД) и показано, что большинство современных систем основаны на алгоритме АЛОХА, несмотря на наличие более эффективных решений. Наибольшая известная пропускная способность ($\approx 0,4877$ сообщений на канал) достигается алгоритмом дробления [13, 18–20], однако его практическое применение ограничено требованием точной временной синхронизации между абонентами и базовой станцией.

Предложен новый алгоритм СМД, основанный на объединении идей алгоритма дробления [13] и алгоритма адаптивная АЛОХА [17]. Он описывается взаимодействием детерминированного и стохастического автоматов, не требует абсолютной синхронизации и достигает пропускной способности 0,485, что сопоставимо с максимальной известной. Алгоритм может быть применен для повышения эффективности случайного доступа в сотовых и других беспроводных сетях, включая технологии типа LoRa с синхронизацией по слотам [21–23].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jiang W., Schotten H.D. The KICK-OFF of 6G Research Worldwide: An Overview // Proc. 7th Int. Conf. on Computer and Communications (ICCC 2021). Chengdu, China. Dec. 10–13, 2021. P. 1–6. <https://doi.org/10.1109/ICCC54389.2021.9674614>
2. Vaezi M., Azari A., Khosravirad S.R., Shirvanimoghaddam M., Azari M.M., Chasaki D., Popovski P. Cellular, Wide-Area, and Non-Terrestrial IoT: A Survey on 5G Advances and the Road Toward 6G // IEEE Commun. Surv. Tutor. 2022. V. 24. № 2. P. 1117–1174. <https://doi.org/10.1109/COMST.2022.3151028>

3. Jiang W., Han B., Habibi M.A., Schotten H.D. The Road Towards 6G: A Comprehensive Survey // IEEE Open J. Commun. Soc. 2021. V. 1. P. 334–366. <https://doi.org/10.1109/OJCOMS.2021.3057679>
4. Madueño G.C., Stefanović Č., Popovski P. Efficient LTE Access with Collision Resolution for Massive M2M Communications // Proc. 2014 IEEE Globecom Workshops (GC Wkshps). Austin, TX, USA. Dec. 8–12, 2014. P. 1433–1438. <https://doi.org/10.1109/GLOCOMW.2014.7063635>
5. Althumali H., Othman M., Noordin N.K., Hanapi Z.M. Dynamic Tree-Splitting Algorithm for Massive Random Access of M2M Communications in IoT Networks // IEEE Syst. J. 2021. V. 16. № 2. P. 3179–3190. <https://doi.org/10.1109/JSYST.2021.3097715>
6. Цыбаков Б.С., Михайлов В.А. Свободный синхронный доступ пакетов в широкополосный канал с обратной связью // Пробл. передачи информ. 1978. Т. 14. № 4. С. 32–59. <http://mi.mathnet.ru/ppi1558>
7. Capetanakis J. Tree Algorithms for Packet Broadcast Channels // IEEE Trans. Inform. Theory. 1979. V. 25. № 5. P. 505–515. <https://doi.org/10.1109/TIT.1979.1056093>
8. Vogel Q., Deshpande Y., Stefanovic C., Kellerer W. An Advanced Tree Algorithm with Interference Cancellation in Uplink and Downlink // Conf. Rec. 57th Asilomar Conf. on Signals, Systems & Computers. Pacific Grove, CA, USA. Oct. 29–Nov. 1, 2023. P. 72–79. <https://doi.org/10.1109/IEEECONF59524.2023.10477014>
9. Vogel Q., Deshpande Y., Stefanović C., Kellerer W. Analysis of d -ary Tree Algorithms with Successive Interference Cancellation // J. Appl. Probab. 2024. V. 61. № 3. P. 1075–1105. <https://doi.org/10.1017/jpr.2023.107>
10. Stefanović Č., Gürsu M., Deshpande Y., Kellerer W. Analysis of Tree-Algorithms with Multi-Packet Reception // Proc. 2020 IEEE Global Communications Conf. (GLOBECOM 2020). Taipei, Taiwan. Virtual Conf., Dec. 7–11, 2020. P. 1–6. <https://doi.org/10.1109/GLOBECOM42002.2020.9322082>
11. Srichavengsup W., Kittipeerachon K. Performance Improvement of Tree Algorithm Using Adaptive Splitting Algorithms // J. Eng. Digit. Technol. 2022. V. 10. № 2. P. 57–65.
12. Wijayasekara S.K., Nakpeerayuth S., Annur R., Srichavengsup W., Sandrasegaran K., Hsieh H.-Y., Wuttisittikulij L. A Collision Resolution Algorithm for RFID Using Modified Dynamic Tree with Bayesian Tag Estimation // IEEE Commun. Lett. 2018. V. 22. № 11. P. 2238–2241. <https://doi.org/10.1109/LCOMM.2018.2865735>
13. Цыбаков Б.С., Михайлов В.А. Случайный множественный доступ пакетов. Алгоритм дробления // Пробл. передачи информ. 1980. Т. 16. № 4. С. 65–79. <http://mi.mathnet.ru/ppi1464>
14. Цыбаков Б.С., Лиханов Н.Б. Некоторые новые алгоритмы случайного множественного доступа // Пробл. передачи информ. 1985. Т. 21. № 2. С. 69–89. <http://mi.mathnet.ru/ppi986>
15. Burkov A., Pastushok I., Turlikov A. A 0.485 Throughput Randomized Part-and-Try Algorithm // Probl. Inf. Transm. 2025. V. 61. № 3 (to appear).
16. Tsybakov B.S. Survey of USSR Contributions to Random Multiple-Access Communications // IEEE Trans. Inform. Theory. 2003. V. 31. № 2. P. 143–165. <https://doi.org/10.1109/TIT.1985.1057023>
17. Михайлов В.А. Геометрический анализ устойчивости цепей Маркова в R_+^n и его приложение к вычислению пропускной способности адаптивного алгоритма случайного множественного доступа // Пробл. передачи информ. 1988. Т. 24. № 1. С. 61–73. <http://mi.mathnet.ru/ppi687>
18. Введенская Н.Д., Пинскер М.С. Неоптимальность алгоритма дробления // Тр. Междунар. семинара «Сверточные коды; связь с многими пользователями». Сочи, 1983. С. 137–140.
19. Введенская Н.Д., Пинскер М.С. Оценка пропускной способности алгоритмов множественного доступа класса FCFS // Пробл. передачи информ. 1990. Т. 26. № 1. С. 58–67. <http://mi.mathnet.ru/ppi593>

20. Цыбаков Б.С. Рандомизированные и нерандомизированные алгоритмы случайного множественного доступа // Пробл. передачи информ. 1989. Т. 25. № 1. С. 88–99. <http://mi.mathnet.ru/ppi642>
21. Ramirez C.G., Sergeyev A., Dyussenova A., Iannucci B. LongShoT: Long-Range Synchronization of Time // Proc. 18th Int. Conf. on Information Processing in Sensor Networks (IPSN'19). Montreal, QC, Canada. Apr. 16–18, 2019. P. 289–300. <https://doi.org/10.1145/3302506.3310408>
22. Polonelli T., Brunelli D., Marzocchi A., Benini L. Slotted ALOHA on LoRaWAN—Design, Analysis, and Deployment // Sensors. 2019. V. 19. № 4. P. 838 (19 pp.). <https://doi.org/10.3390/s19040838>
23. Shayo E., Abdalla A.T., Mwambela A., Sutikno T. Energy Efficient Slotted Synchronization Approach in LoRaWAN // Indones. J. Electr. Eng. Comput. Sci. 2024. V. 35. № 1. P. 203–212. <https://doi.org/10.11591/ijeecs.v35.i1.pp203-212>

RANDOMIZED SPLITTING ALGORITHM FOR CENTRALIZED RANDOM MULTIPLE ACCESS SYSTEMS

© 2025 A.A. Burkov, I.A. Pastushok, A.M. Turlikov

St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation (SUAI)

E-mail: a.burkov@k36.org, pastushokirina22@mail.ru, turlikov@guap.ru

Modern communication systems widely use random multiple access (RMA) algorithms based on the ideas of the ALOHA algorithm. An alternative to this approach is to use ideas based on the splitting algorithm, which has a throughput of 0.4877 messages per unit of time, the highest throughput among all known RMA algorithms. The main problem in implementing this algorithm in practice is the need for precise time synchronization of all devices. This paper proposes an RMA algorithm based on the splitting algorithm that is free of this drawback, allowing it to be used in practice in centralized systems.

Keywords: cellular networks, random multiple access systems, splitting algorithm, massive machine-type communication, finite-state automaton

DOI: 10.7868/S3034583925030027

Received 11.08.2025

Revised 06.10.2025

Accepted 29.10.2025

This work was supported by the Russian Science Foundation, project no. 22-19-00305-P “Spatio-Temporal Stochastic Models of Wireless Networks with a Large Number of Users” (see <https://rscf.ru/project/22-19-00305/>).