

УДК 004.93'1 : 515.124

**О БИПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ И ИХ ПРИМЕНЕНИИ К ЗАДАЧАМ  
РАСПОЗНАВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ**

© 2025 г. **И.Л. Покровский**

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана*  
*E-mail: pokrovski.ilia@yandex.ru*

Подход к задаче распознавания геометрических образов, основанный на введении системы координат, моделирующей бинокулярное зрение, позволяет ввести понятие плоской наблюдаемой кривой, дать описание множества наблюдаемых кривых в форме критерия, доказать предкомпактность этого множества относительно метрики Хаусдорфа и, таким образом, установить в этом множестве существование конечной эpsilon-сети.

*Ключевые слова:* бинокулярная фузия, биполярные координаты, поле конусов, видимое множество, метрика Хаусдорфа, эpsilon-сеть

**DOI:** 10.7868/S3034583925030043

Поступила в редакцию 21.07.2025

После доработки 13.10.2025

Принята к публикации 21.11.2025

*Светлой памяти Алексея Викторовича Чернавского*

**§ 1. Введение**

Методы топологического анализа данных (ТДА), т.е. использования топологических характеристик объектов наблюдения в задачах машинного зрения, затронутые в работах [1, 2], могут быть использованы в задаче *бинокулярной фузии* – формирования единого наблюдаемого образа на основе совмещения потоков монокулярной информации. С бинокулярной системой искусственного зрения на плоскости естественным образом связана *биполярная система координат*, полюса которой соответствуют «глазам» зрительной системы. Зрительные оси биполярной системы координат порождают естественные поля конусов на полуплоскости наблюдения.

Ранее свойства полей конусов, связанные с важным инструментом распознавания геометрических образов – метрикой Хаусдорфа, были изучены, например, в работе [2]. В настоящей статье, являющейся краткой версией работы [3], на основе понятия геометрического поля конусов дано определение плоской наблюдаемой кривой, сформулированы критерии наблюдаемости, доказана предкомпактность семейства наблюдаемых кривых в метрике Хаусдорфа и указан способ построения конечной  $\varepsilon$ -сети.

Автор благодарен А.В. Чернавскому и А.П. Петрову за предложение применить биполярную систему координат для анализа геометрических изображений и внимание к работе. Автор также благодарен Ф.И. Покровскому за полезные обсуждения.

## § 2. Биполярные координаты и условие наблюдаемости

Зафиксируем на плоскости с декартовыми координатами  $(x, y)$  точки  $L(-p, 0)$  и  $R(p, 0)$  со значением параметра  $p > 0$ . Тогда положение произвольной точки  $M(x, y)$  в верхней полуплоскости  $y > 0$  однозначно определяется внутренним и внешним углами треугольника  $LRM$ ,  $\angle MLR \equiv \alpha$  и  $\angle LRM \equiv \pi - \beta$  соответственно (рис. 1). Представленные в биполярных координатах соответствующие точки  $(\alpha, \beta)$  находятся в треугольной области

$$T \equiv \{(\alpha, \beta) : 0 < \alpha < \beta < \pi\}$$

(см. рис. 2).

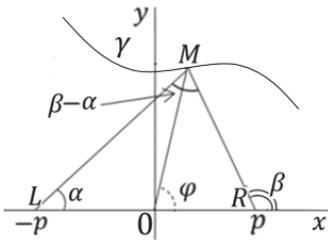


Рис. 1

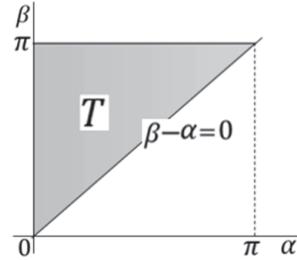


Рис. 2

Биполярные системы координат применяются, например, в инженерной геодезии как местные системы координат [4]. В ряде случаев для обозначения биполярных координат используется термин «биангулярные» [5].

**Определение 1.** Назовем введенные на рис. 1 координаты  $(\alpha, \beta)$  *биполярными координатами* точки  $(x, y)$ .

Переход от биполярных координат  $(\alpha, \beta)$  к декартовым  $(x, y)$  имеет вид

$$x = p \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)} = p \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}, \quad y = p \frac{2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)} = p \frac{2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}. \quad (1)$$

Из соотношений (1) непосредственно следует, что тангенс полярного угла  $\varphi \equiv \angle ROM$  (см. рис. 1) есть *среднее гармоническое* тангенсов координат  $\alpha$  и  $\beta$ . Координатные линии биполярной системы координат на плоскости  $(x, y)$  являются лучами, а множество, ограниченное лучами  $\alpha = \alpha_{1,2}$  и  $\beta = \beta_{1,2}$ ,  $\alpha_1 < \alpha_2$ ,  $\beta_1 < \beta_2$ , может быть:

- ограниченным четырехугольником, если  $\alpha_2 < \beta_1$ ;
- неограниченным многоугольником с тремя вершинами, если  $\alpha_2 \geq \beta_1$ .

Угол схождения осей зрения  $\beta - \alpha$  (см. рис. 1) определяет детальность обзора. Положим в качестве практического критерия различимости фрагментов зрительного поля в окрестности точки  $(\alpha, \beta)$  выполнение условий

$$\delta \leq \beta - \alpha \leq \pi - \delta \quad (2)$$

для фиксированного значения  $\delta$ ,  $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ . Ограничения вида (2) оставляют от области  $T$  трапецию  $T_\delta$ , выделенную на рис. 3.

Соответствующая область в зрительном поле (т.е. в верхней полуплоскости  $y > 0$ ), представляющая собой часть круга с вырезанной лункой, показана на рис. 4.

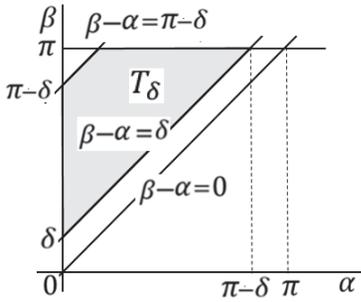


Рис. 3

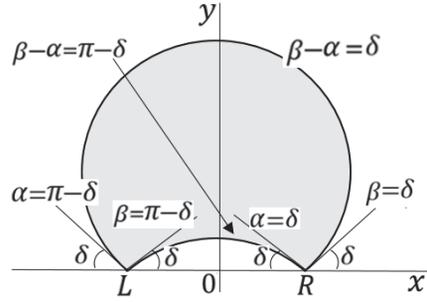


Рис. 4

Определение 2. Зафиксируем  $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ . Точки плоскости  $(x, y)$ , удовлетворяющие неравенствам (2), будем называть  $\delta$ -наблюдаемыми.

### § 3. Поле конусов

Определение 3. Назовем (геометрическим) полем конусов отображение, ставящее в соответствие каждой точке области плоский конус с вершиной в этой точке.

Определение 4. Будем говорить, что кривая принадлежит полю конусов, если для каждой своей точки она целиком содержится в конусе этого поля с вершиной в этой точке.

Пример 1. Условие Липшица с константой  $K$  для функции  $y = f(x)$ , определенной на отрезке  $[a, b]$ , можно эквивалентным образом переформулировать геометрически как условие принадлежности графика  $K$ -липшицевой функции  $f(x)$  постоянному полю конусов

$$|\eta - y| \leq K|\xi - x| \tag{3}$$

с вершинами в точках  $(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$  (где  $(\xi, \eta)$  – текущая точка конуса). Более точно, при этом график целиком принадлежит каждому конусу (конусу Липшица) вида

$$|\eta - f(x)| \leq K|\xi - x|, \quad x \in [a, b]. \tag{3'}$$

Определение 5. Кривая лежит в поле конусов внутренним образом, если для каждого конуса, помимо его вершины, остальная часть графика принадлежит внутренней части конуса.

Пример 2. Графики непрерывных монотонно возрастающих функций, определенных на отрезке  $[a, b]$ , содержатся в поле конусов

$$(\xi - x)(\eta - y) \geq 0, \quad x \in [a, b], \quad y \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

образованных координатными линиями вида  $x, y = \text{const}$  (где  $(\xi, \eta)$  – текущая точка конуса), а именно график функции  $y = f(x)$  содержится внутренним образом, в смысле определения 5, в конусах поля (4) с вершинами в точках вида  $(x, f(x))$ :

$$(\xi - x)(\eta - f(x)) \geq 0, \quad x \in [a, b], \tag{4_1}$$

Для монотонно убывающих функций  $f$  аналог поля (4) имеет вид

$$(\xi - x)(\eta - y) \leq 0, \quad x \in [a, b], \quad y \in \mathbb{R},$$

и графики внутренним образом содержатся в поле конусов с вершинами в точках  $(x, f(x))$ :

$$(\xi - x)(\eta - f(x)) \leq 0, \quad x \in [a, b]. \quad (4_2)$$

Итогом рассуждений примеров 1 и 2 является

**Предложение 1.** *Справедливы следующие утверждения:*

1) *Выполнение условия Липшица с константой  $K$  для функции  $y = f(x)$  на отрезке равносильно принадлежности графика этой функции полю конусов вида (3).*

2) *Монотонное возрастание функции  $y = f(x)$  равносильно принадлежности графика этой функции полю конусов вида (4<sub>1</sub>) внутренним образом, убывание – полю конусов вида (4<sub>2</sub>) также внутренним образом.*

3) *Поворот плоскости на угол  $\frac{\pi}{4}$  переводит элементы поля конусов вида (3) в элементы (4<sub>1,2</sub>) и обратно: элементы поля вида (3) при повороте в положительном направлении переходят в элементы поля вида (4<sub>1</sub>), в отрицательном – в элементы поля вида (4<sub>2</sub>). При этом график 1-липшицевой функции при повороте в положительном направлении переходит в график монотонно возрастающей функции, в отрицательном – в график монотонно убывающей функции.*

#### § 4. Описание класса видимых кривых

Координатная сетка биполярной системы координат представляет собой совокупность лучей, выходящих из точек  $L$  и  $R$ , а координатные линии  $\alpha, \beta = \text{const}$ , пересекаясь, естественным образом образуют два смежных поля конусов в верхней полуплоскости, элементы одного из которых содержат отрезок  $[LR]$ , а другого – не содержат. Первое будем называть полем *профильных конусов* ( $\Pi$ ), а второе – полем *фронтальных конусов* ( $\Phi$ ). Элементы этих полей с соответствующими обозначениями показаны на рис. 5.

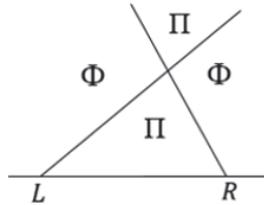


Рис. 5

**Определение 6.** Множество (кривую)  $\gamma$  в верхней полуплоскости будем называть *видимым множеством (видимой кривой)*, если каждая точка  $M \in \gamma$  является единственной точкой пересечения замыкания треугольной области  $\triangle LRM$  с  $\gamma$  (см. рис. 1).

Из определения 6 непосредственно вытекает следующий критерий видимости плоской кривой.

**Теорема 1.** *Критерием видимости кривой из верхней полуплоскости является принадлежность этой кривой полю фронтальных конусов.*

Конкретизацией утверждения теоремы 1 является

**Теорема 2.** *Для того чтобы кривая, заданная в биполярных координатах (1) с помощью непрерывной функции  $\beta = \beta(\alpha)$ ,*

$$\beta: [\alpha_1, \alpha_2] \rightarrow [\beta_1, \beta_2], \quad 0 < \alpha_1 < \beta_1, \quad \alpha_2 < \beta_2 < \pi,$$

*была видимой кривой, необходимо и достаточно, чтобы функция  $\beta = \beta(\alpha)$  была строго возрастающей.*

Доказательства обеих теорем непосредственно следуют из определений 4 и 6, предложения 1 и геометрической очевидности сформулированных утверждений.

### § 5. Предкомпактность семейств липшицевых кривых в метрике Хаусдорфа

В задачах обработки и анализа геометрических образов целесообразно использовать метрику Хаусдорфа [6]. Пусть  $(\mathcal{X}, \rho)$  – метрическое пространство,  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{X}$  – компактные множества. Обозначим отклонения множества  $\mathcal{B}$  от множества  $\mathcal{A}$  и множества  $\mathcal{A}$  от множества  $\mathcal{B}$  через

$$\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \equiv \max_{A \in \mathcal{A}} \min_{B \in \mathcal{B}} \rho(A, B) \quad \text{и} \quad \delta(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \equiv \max_{B \in \mathcal{B}} \min_{A \in \mathcal{A}} \rho(A, B)$$

соответственно. Расстояние Хаусдорфа

$$\rho_{\mathcal{H}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \equiv \max\{\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \delta(\mathcal{B}, \mathcal{A})\} \quad (5)$$

превращает множество компактных подмножеств  $\mathcal{X}$  в метрическое пространство с метрикой  $\rho_{\mathcal{H}}$  [6]. Очевидно, справедливо

**Предложение 2.** *Пусть  $\mathcal{X}$  – метрическое пространство с функцией расстояния  $\rho$ , инвариантной относительно некоторого преобразования. Тогда величина  $\rho_{\mathcal{H}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  также инвариантна относительно этого преобразования.*

Расстояние  $\rho_{\mathcal{H}}$  определено между замкнутыми непрерывными кривыми  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  – графиками непрерывных функций  $f_{1,2} \in C[a, b]$  (которые компактны как образы непрерывного отображения компактного отрезка) соответственно. Наряду с расстоянием  $\rho_{\mathcal{H}}$  для кривых, являющихся графиками непрерывных функций, возникает метрика  $\rho_C(\gamma_1, \gamma_2)$ , порожденная равномерной нормой банахова пространства  $C[a, b]$ :

$$\rho_C(\gamma_1, \gamma_2) \equiv \|f_2 - f_1\|_{C[a,b]}, \quad \|f\|_{C[a,b]} \equiv \max_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

Из определения расстояния Хаусдорфа (5) следует

**Предложение 3.** *Функция  $\rho_C$  является метрикой для кривых – графиков непрерывных функций, допускающей оценку  $\rho_{\mathcal{H}}(\gamma_1, \gamma_2) \leq \rho_C(\gamma_1, \gamma_2)$ , где  $\gamma_{1,2}$  – графики соответствующих непрерывных функций  $f_{1,2}$ . Множество кривых, компактное (предкомпактное) в метрике  $\rho_C$ , компактно (предкомпактно) в метрике  $\rho_{\mathcal{H}}$ .*

Рассмотрим в качестве  $\mathcal{X}$  множество  $\mathcal{G}_K[c, d]$  кривых – графиков  $K$ -липшицевых функций с метрикой Хаусдорфа  $\rho_{\mathcal{H}}$ , которое положим ограниченным. По теореме Арцела [7, гл. V, § 2, теорема 1, с. 236], соответствующее семейство функций предкомпактно в  $C[c, d]$ . Непосредственное применение предложения 3 доказывает

**Предложение 4.** *Множество  $\mathcal{G}_K[c, d]$  предкомпактно в метрике  $\rho_{\mathcal{H}}$  и обладает конечной  $\hat{\varepsilon}$ -сетью в метрике Хаусдорфа.*

Заметим, что утверждение предложения 4 остается в силе и для множества  $\mathcal{G}_K\{c\}$  (в случае превращения отрезка в точку,  $c = d$ ).

Предположим равномерную по  $[c, d]$  ограниченность семейств  $\mathcal{G}_1[c, d]$  графиков 1-липшицевых функций.

**Предложение 5.** Пусть  $Z(\widehat{\varepsilon}, \mathcal{G}_1[c, d])$  –  $\widehat{\varepsilon}$ -сеть среди кривых, составляющих  $\mathcal{G}_1[c, d]$ . Тогда при расширении отрезка  $[c, d]$  до  $[c - \tau, d + \tau] \subset [a, b]$  для  $\varepsilon(\widehat{\varepsilon}, \tau)$  элементы сети  $Z(\widehat{\varepsilon}, \mathcal{G}_1[c, d])$  образуют  $\varepsilon(\widehat{\varepsilon}, \tau)$ -сеть в метрике Хаусдорфа для 1-липшицевых кривых.

Идея доказательства предложения 5 заключается в том, чтобы, расширяя отрезок  $[c, d]$  до  $[c - \tau, d + \tau]$  и, соответственно, продолжая кривые множества  $\mathcal{G}_1[c, d]$  до 1-липшицевых кривых из  $\mathcal{G}_1[c - \tau, d + \tau]$ , сохранить для нового семейства функций прежнюю сеть, состоящую из тех же элементов  $Z(\widehat{\varepsilon}, \mathcal{G}_1[c, d])$ , но с новым значением  $\varepsilon > \widehat{\varepsilon}$ , а именно

$$\varepsilon(\widehat{\varepsilon}, \tau) = \sqrt{2(\tau^2 + \sqrt{2}\widehat{\varepsilon}\tau + \widehat{\varepsilon}^2)}.$$

Подробное доказательство предложения 5 содержится в [3].

**Теорема 3.** Множество ограниченных в совокупности 1-липшицевых кривых со всевозможными основаниями  $[c, d] \subseteq [a, b]$  предкомпактно в метрике Хаусдорфа, и следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  имеет конечную  $\varepsilon$ -сеть.

## § 6. Применение к задаче распознавания геометрических образов

**Определение 7.** Видимые кривые, состоящие из  $\delta$ -наблюдаемых точек (см. определение 2), будем называть  $\delta$ -наблюдаемыми кривыми.

Топологически множество кривых из определения 7 характеризует

**Теорема 4.** Множество  $\delta$ -наблюдаемых кривых,  $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ , представленных в биполярных координатах, предкомпактно в метрике Хаусдорфа, и следовательно, для произвольного  $\varepsilon > 0$  обладает конечной  $\varepsilon$ -сетью.

Доказательство теоремы 4 опирается на описанную в предложении 1 конструкцию поворота плоскости  $(\alpha, \beta)$  на угол  $\frac{\pi}{4}$  с сохранением, в силу предложения 2, расстояния Хаусдорфа, и последующее применение теоремы 3.

Несложно видеть, что из теоремы 4 вытекает

**Следствие 1.** Множество конечных наборов наблюдаемых кривых в биполярных координатах предкомпактно, и следовательно, для произвольного  $\varepsilon > 0$  обладает конечной  $\varepsilon$ -сетью относительно метрики Хаусдорфа.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hartley R., Zisserman A.* Multiple View Geometry in Computer Vision. Cambridge, UK; New York: Cambridge Univ. Press, 2003.
2. *Turner K.* Cone Fields and Topological Sampling in Manifolds with Bounded Curvature // *Found. Comput. Math.* 2013. V. 13. № 6. P. 913–933. <https://doi.org/10.1007/s10208-013-9176-6>
3. *Pokrovski I.L.* Application of Bipolar Coordinates in Machine Vision and Geometric Pattern Recognition Problems // *Probl. Inf. Transm.* 2025. V. 61. № 3 (to appear).
4. *Соловьев А.Н.* Основы топографии и инженерной геодезии. СПб.: СПбГЛТУ, 2015.
5. *Zerr G.B.M.* Biangular Coordinates // *Amer. Math. Monthly.* 1910. V. 17. № 2. P. 34–38. <https://doi.org/10.1080/00029890.1910.11997537>
6. *Михайлов И.А.* Об одном методе распознавания изображений // *Модел. и анализ информ. систем.* 2007. Т. 14. № 4. С. 7–12. <https://www.mathnet.ru/rus/mais151>
7. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

---

---

**ON BIPOLAR COORDINATES AND THEIR APPLICATION  
TO GEOMETRIC PATTERN RECOGNITION PROBLEMS**© 2025 **I.L. Pokrovski***Bauman Moscow State Technical University**E-mail: pokrovski.ilia@yandex.ru*

An approach to the geometric pattern recognition problem based on introducing a coordinate system modeling binocular vision, allows us to introduce the concept of a flat observable curve, describe the set of observable curves in the form of a criterion, prove the precompactness of this set with respect to the Hausdorff metric, and thus establish the existence of a finite epsilon-net in this set.

*Keywords:* binocular fusion, bipolar coordinates, cone field, visible set, Hausdorff metric, epsilon-net

**DOI:** 10.7868/S3034583925030043

Received 21.07.2025

Revised 13.10.2025

Accepted 21.11.2025